C O L L E G E D I C T A A T

G R A F E N T H E O R I E

D E E L 1

D O O R

L. C. M. K A L L E N B E R G

Rijksuniversiteit Leiden

Mag. Uitgifte No. 68

INHOUDSOPGAVE pagina

HOOFDSTUK I: GRAFEN

Paragraaf 1: Definities en voorbeelden

Opgave 1.

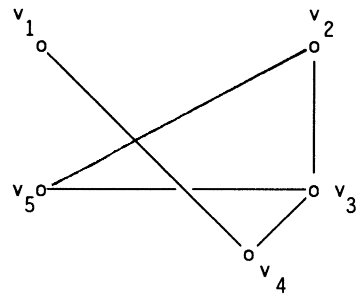
Beschouw de hiernaast getekende graaf G.

a. Bepaal van ieder knooppunt de graad.

b. Bepaal de complementaire graaf $\bar{G}$

c. Is G regulier? Is G bipartiet?
   Is $\bar{G}$ bipartiet?

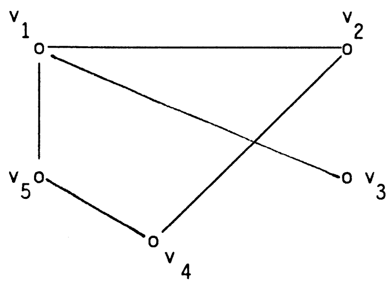
d. Bepaal de structuurmartix van G.



Oplossing:

a. $\delta(v_1) = 1$; $\delta(v_2) = 2$; $\delta(v_3) = 3$; $\delta(v_4) = 2$; $\delta(v_5) = 2$.

b.



c. Neen, want $\delta(v_1) = 1 \neq 2 = \delta(v_2)$;
   Neen, want stel $v_2 \in V_1$, dan behoren v_3 en v_5 tot V_2, terwijl v_3 en v_5 verbonden zijn: tegenspraak;
   Ja, want de splitsing $V_1 = \{v_1, v_4\}$ en $V_2 = \{v_2, v_3, v_5\}$ voldoet.

d. $$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Opgave 2.

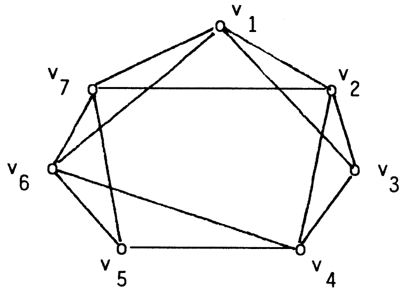
Bewijs dat in een normale graaf $2m \leq n^2 - n$.

Oplossing:

G normaal $\rightarrow$ $\delta(v) \leq n-1$ $\rightarrow$ $2m = \Sigma_{v \in V}\, \delta(v) \leq n(n-1) = n^2 - n$.

Opgave 3

a. Bepaal de structuurmatrix van de hiernaast getekende graaf.
b. Teken de complementaire graaf.

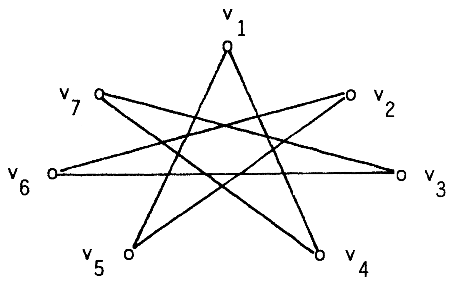


Oplossing:

a.

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b.

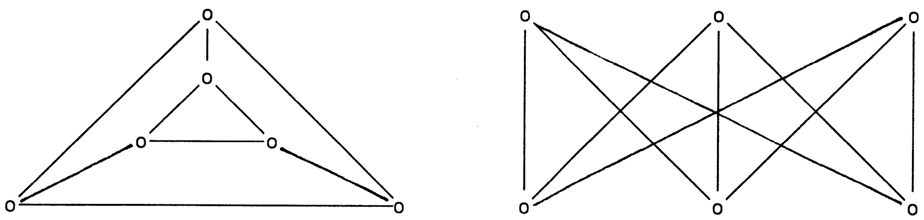


Merk op: $\bar{G} = C_7$.

Opgave 4.

Ga voor ieder paar van de hieronder getekende grafen na of ze isomorf zijn.

a.



b.

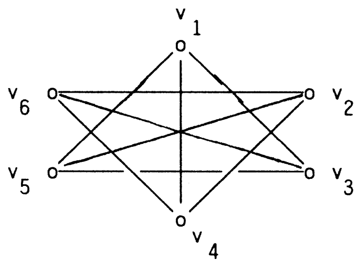
c.

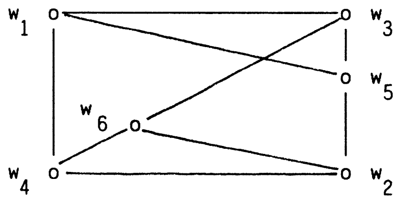
Oplossing:

a. Neen: de eerste graaf bevat K_3 als deelgraaf en is dus niet bipartiet, terwijl de tweede de bipartiete graaf $K_{3,3}$ is.

b. Neen: in de eerste graaf zijn de knooppunten van de graad 2 niet verbonden, terwijl er in de tweede een paar knooppunten van de graad twee wel verbonden is.

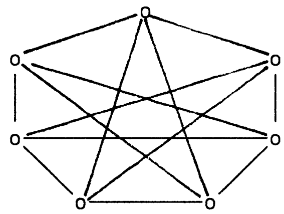
c. Ja, volgens onderstaande nummering met v's en w's.





Opgave 5.

Toon aan dat de hiernaast getekende graaf isomorf is met de graaf uit opgave 3.



Oplossing:

Van beide grafen is de complementaire graaf de C_7. De oorspronkelijke grafen zijn dus ook isomorf.

Opgave 6.

Zij G een normale graaf die isomorf is met zijn complementaire graaf $\bar{G}$ (zo'n graaf heet zelf-complementair).

a. Bewijs dat het aantal knooppunten van $\bar{G}$ òf een viervoud òf een viervoud + 1 is.

b. Bepaal een zelf-complementaire graaf met 5 knooppunten.

c. Bepaal alle zelf-complentaire grafen met 4 knooppunten.

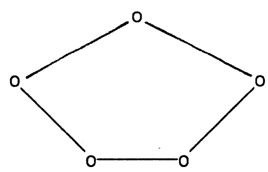
Oplossing:

a.

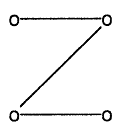
	knooppunten	takken
G :	n	m
$\bar{G}$:	n	$\frac{1}{2}n(n-1)-m$

$G \cong \bar{G} \rightarrow m = \frac{1}{2}n(n-1) - m \rightarrow 4m = n(n-1) \rightarrow$ (g.g.d. $(n,n-1) = 1$) òf $n \equiv 0 \pmod 4$ òf $n \equiv 1 \pmod 4$.

b. $n = 5 \rightarrow m = \frac{1}{2}n(n-1) - m \rightarrow m = 5$.
De hiernaast getekende graaf voldoet, want $G \cong \bar{G} \cong C_5$.



c. $n = 4 \rightarrow m = \frac{1}{2}n(n-1)-m \rightarrow m = 3$.
Het is eenvoudig na te gaan dat de hiernaast getekende graaf de enige is.



Opgave 7.

Bewijs dat in een normale, bipartiete graaf met n knooppunten en m takken geldt: $m \le \frac{1}{4}n^2$.

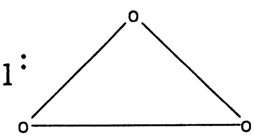
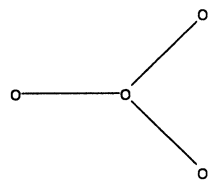
Oplossing:

Stel $G = G(V_1, V_2)$ met $\#V_1 = p$ en $\#V_2 = n-p$. Dan geldt: $m \le p(n-p)$.
Deze functie van p is maximaal voor $p = \frac{1}{2}n$, waaruit volgt $m \le \frac{1}{4}n^2$.

Opgave 8.

Zij $G = (V,E)$ een normale graaf met $V = \{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$, en $E = \{e_1,e_2,\ldots e_m\}$.
De lijngraaf $L(G) = (L(V), L(E))$ wordt gedefinieerd door

$$\begin{cases} L(V) = \{w_1,w_2,\ldots,w_m\} \\ (w_i \ \& \ w_j) \in L(E) \text{ d.e.s.d. als } e_i \text{ en } e_j \text{ in G aangrenzend zijn.} \end{cases}$$

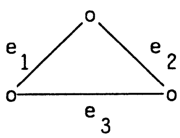
a. Teken de lijngrafen van G_1:  en G_2: 

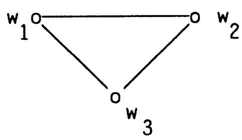
b. Bereken het aantal elementen van $L(E)$ in termen van de graden van de knooppunten van G.

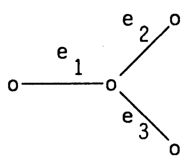
c. Bewijs dat de lijngraaf van de volledige graaf K_n regulier van de graad 2n-4 is.

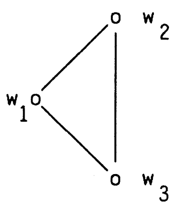
Oplossing:

a.

G_1 : 

$\rightarrow$ $L(G_1)$: 

G_2 : 

$\rightarrow$ $L(G_2)$: 

b. Het aantal takken in de lijngraaf = het aantal paren aangrenzende takken

$$\text{in G} = \sum_{\substack{v\in V \\ \delta(v)\ge 2}} \binom{\delta(v)}{2} = \sum_{\substack{v\in V \\ \delta(v)\ge 2}} \tfrac{1}{2}\delta(v)\{\delta(v)-1\} =$$

(omdat de term achter de sommatie toch 0 is voor $\delta(v) = 0$ of 1)

$$= \sum_{v\in V} \tfrac{1}{2}\delta(v)\{\delta(v)-1\} = \tfrac{1}{2}\sum_{v\in V} \delta(v)^2 - \tfrac{1}{2}\sum_{v\in V} \delta(v) = \tfrac{1}{2}\sum_{v\in V} \delta(v)^2 - m$$

(omdat $\Sigma_{v\in V}\, \delta(v) = 2m$).

c. Iedere tak grenst aan $2(n-2)$ andere takken, dus $L(K_n)$ is $(2n-4)$-regulier.

Paragraaf 2: Ketens en kringen

Opgave 1.

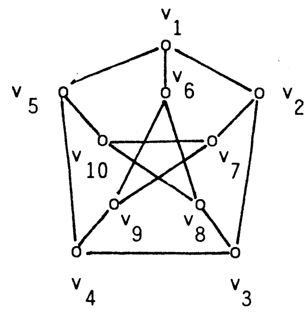
Bepaal voor de hiernaast getekende graaf:

a. Een takkenreeks van de lengte 4.

b. Een enkelvoudige kring van de lengte 6.

c. Een enkelvoudige kring van de lengte 9.

d. Een snede bestaande uit 5 takken.



Oplossing:

a. $[v_1, v_2, v_3, v_4, v_5]$;

b. $[v_1, v_2, v_3, v_4, v_9, v_6, v_1]$;

c. $[v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_{10}, v_7, v_9, v_6, v_1]$;

d. $\{(v_1\&v_6), (v_2\&v_7), (v_3\&v_8), (v_4\&v_9), (v_5\&v_{10})$.

Opgave 2.

Zij G een samenhangende graaf en laat $e \in E$.

Bewijs dat e deel uitmaakt van een kring dan en slechts dan als $G-\{e\}$ samenhangend is.

Oplossing:

→ Stel e zit in een kring C en e heeft als eindpunten v en w. Omdat e deel uitmaakt van de kring C is in $C - \{e\}$ ook een verbinding tussen v en w.
Beschouw een willekeurig tweetal knooppunten x en y. Er is in G een keten tussen x en y.
Als deze keten e niet bevat, dan is er ook een keten in $G - \{e\}$.
Als deze keten e wel bevat, neem dan $C - \{e\}$ in plaats van e. Dit geeft een takkenreeks tussen x en y, zodat er ook een keten is tussen x en y in $G - \{e\}$.

← Er is in $G - \{e\}$ een keten tussen de eindpunten van e. Tezamen met e geeft dit een kring.

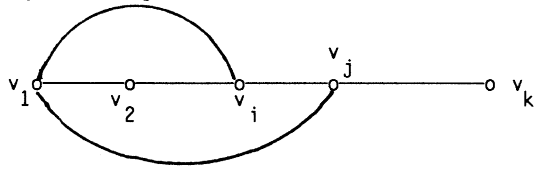
Opgave 3.

Zij $G = (V,E)$ een normale graaf welke regulier is van de graad 3.

Laat d de grootste gemene deler zijn van het aantal takken in de enkelvoudige kringen. Bewijs dat $d \leq 2$.

<u>Aanwijzing</u>: Beschouw de langste enkelvoudige keten, zeg $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k$.
Ga na welke enkelvoudige kringen de andere met v_1 incidente takken genereren, en beschouw de lengten van deze kringen.

Oplossing:



Veronderstel dat v_1 verbonden is met v_2, v_i en v_j. v_i en v_j liggen dan op deze langste enkelvoudige keten.

Er geldt: $[v_1, v_2, \ldots , v_i, v_1]$ is enkelvoudige kring $\rightarrow$ $d \mid i$

$[v_1, v_2, \ldots , v_j, v_1]$ is enkelvoudige kring $\rightarrow$ $d \mid j$

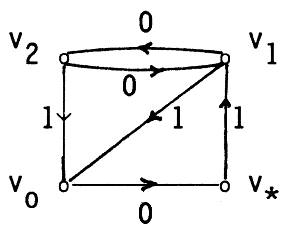
$[v_1, v_i, \ldots , v_j, v_1]$ is enkelvoudige kring $\rightarrow$ $d \mid j - i + 2$

Dus: $\left.\begin{array}{l} d \mid j-i \\ d \mid j-i+2 \end{array}\right\} \rightarrow d \mid 2$.

Opgave 4.

Een electronisch circuit wordt gebouwd om rijtjes 0'en en 1'en van de vorm 010^*10 te herkennen (0^* staat voor een zeker aantal (eventueel nul) 0'en). Voorbeelden van goede rijtjes zijn 0110, 01010, 010010 en 0100000010.
Construeer een gerichte graaf $D = (V,A)$ met vier knooppunten, zodanig dat iedere pijlenreeks van v_0 naar v_* die minstens één ander knooppunt van V bevat correspondeert met een rijtje van de vorm 010^*10.

Oplossing:



Een rij met 2p nullen correspondeert met:

$$[v_0, v_*, \underbrace{v_1, v_2, \ldots ,v_1, v_2, v_1}_{\text{2p pijlen}}, v_0, v_*]$$

Een rij met 2p + 1 nullen correspondeert met:

$$[v_0, v_*, \underbrace{v_1, v_2, \ldots ,v_1, v_2,}_{\text{2p + 1 pijlen}} v_0, v_*]$$

Opgave 5.

Zij $G = (V,E)$ een samenhangende graaf zódanig dat voor iedere $e \in E$ $G-\{e\}$ onsamenhangend is. Bepaal het aantal takken van G.

Oplossing:

Met inductie naar n zullen we aantonen dat $m = n-1$.
Voor $n = 2$ is de bewering triviaal. Stel dat de bewering klopt voor grafen met n-1 knooppunten en laat G n knooppunten hebben.
Er is een knooppunt met graad 1 (anders is er een kring en kan een tak worden weggelaten zonder dat dit de samenhamg verstoort), zeg v, met aangrenzend knooppunt w.
Volgens de inductieveronderstelling bevat $G - \{v\&w)$ n-2 takken. G bevat dus n-1 takken.

Opgave 6.

Zij $G = (V,E)$ een normale graaf met een even aantal knooppunten en zonder driehoeken.
Bewijs dat G hoogstens $\frac{1}{4}n^2$ takken heeft en geef voor een willekeurige even waarde van n een voorbeeld waarin deze grens wordt aangenomen.

Oplossing:

Stel $n = 2p$ en pas inductie naar p toe. Voor $p = 1$ is de bewering triviaal.
Stel dat het klopt voor grafen met $2(p-1)$ knooppunten en laat G $2p$ knooppunten hebben.
Kies twee aangrenzende knooppunten, zeg v en w. Deze zijn niet met eenzelfde knooppunt x verbonden, want anders is $[v, w, x]$ een driehoek.
Voor het aantal takken kunnen we nu de volgende afschatting geven:

$$m \le \frac{1}{4}(n-2)^2 + (n-2) + 1 = \frac{1}{4}n^2,$$

de term $\frac{1}{4}(n - 2)^2$ vanwege de inductieveronderstelling, de term $(n-2)$ is een bovengrens voor de verschillende knooppunten waar v en w mee verbonden kunnen zijn en de 1 correspondeert met de tak tussen v en w.
Deze bovengrens wordt aangenomem in de volledige bipartiete graaf $K_{\frac{1}{2}n,\frac{1}{2}n}$

Opgave 7.

a. De takken van de K_6 worden rood of blauw gekleurd.
   Toon aan dat voor een willekeurige kleuring er altijd een driehoek is waarvan de takken dezelfde kleur hebben.

b. Toon aan dat er in iedere groep van 6 personen er altijd 3 zijn die òf elkaar geen van allen kennen òf elkaar alle 3 kennen.

Oplossing:

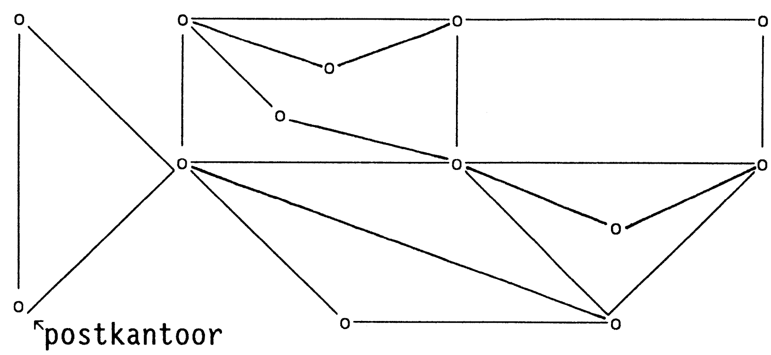
a. Neem een willekeurige v. Omdat $\delta(v) = 5$, hebben minstens 3 takken dezelfde kleur, zeg rood. De drie eindpunten van deze rode takken zijn alle met elkaar verbonden. Als in deze driehoek één tak rood is, dan geeft deze tak met de verbindingen naar v een rode driehoek. Zijn de drie eindpunten onderling slechts door blauwe takken verbonden, dan geeft dit een blauwe driehoek.

b. Beschouw de K_6. Kleur de tak tussen twee knooppunten rood als de corresponderende personen elkaar kennen; anders wordt de kleur blauw. Pas vervolgens onderdeel a toe.

Paragraaf 3: Euler grafen.

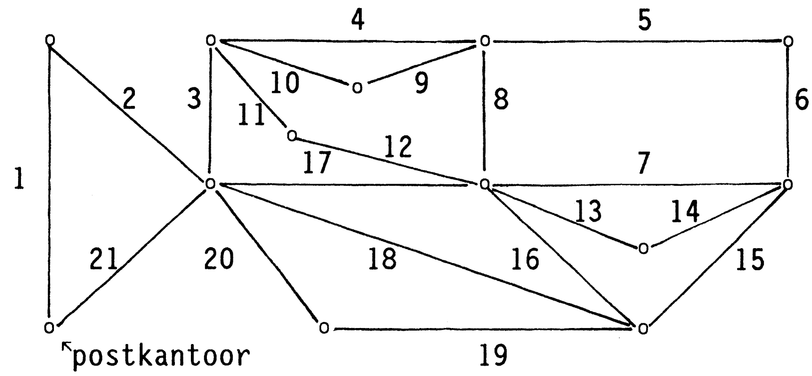
Opgave 1.

Een postbode vertrekt op het postkantoor, moet de hieronder als takken van een graaf getekende straten doorlopen en daarna weer terugkeren op het postkantoor. Geef een route die zodanig is dat iedere straat precies één keer wordt doorlopen.



Oplossing:

Deze is in onderstaande figuur aangegeven.



Opgave 2.

Zij G een samenhangende 4-reguliere graaf.

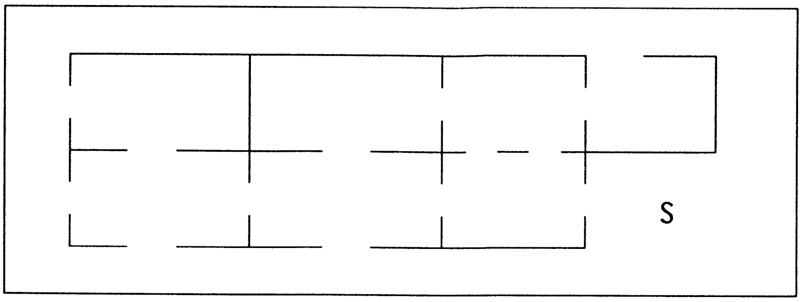
Bewijs dat de takken van G met twee kleuren gekleurd kunnen worden z.d.d. ieder knooppunt incident is met twee takken van elke kleur.

Oplossing:

Omdat G Euler is, vormen de takken een kring ter lengte 2n. De takken zijn dus afwissend met twee kleuren te kleuren. De kring komt bij ieder knooppunt twee keer aan en gaat ook twee keer weg: ieder knooppunt is incident met twee takken van elke kleur.

Opgave 3.

Beschouw de hieronder getekende plattegrond van een tentoonstellingsruimte. Is het mogelijk om door de zeven zalen en de daaromheen liggende gang een wandeling te maken waarbij iedere doorgang precies één keer wordt gepasseerd ? De wandeling moet starten en eindigen bij S.

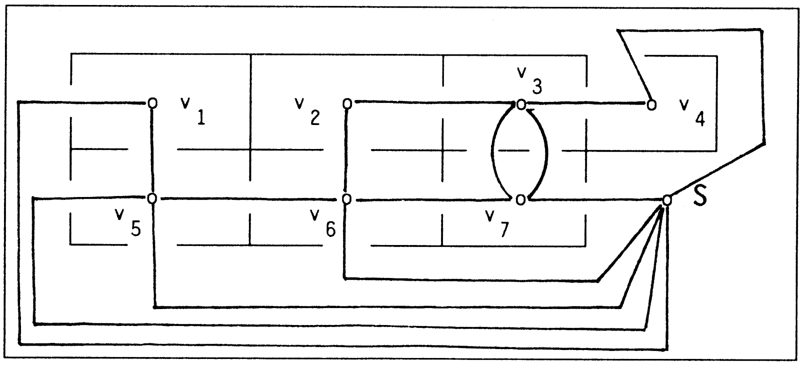


Oplossing:

Neem in ieder van de zeven zalen en in de daaromheen liggende gang een knooppunt. Verbind twee knooppunten door een tak voor iedere verbinding die er tussen de desbetreffende ruimtes is. Dit levert een Euler graaf op. De takken vormen dus één kring die correspondeert met de wandeling.

De graaf is hieronder in de plattegrond getekend en een goede route is:

$S \to v_1 \to v_5 \to v_6 \to v_2 \to v_3 \to v_7 \to v_3 \to v_4 \to S \to v_6 \to v_7 \to S \to v_5 \to S.$

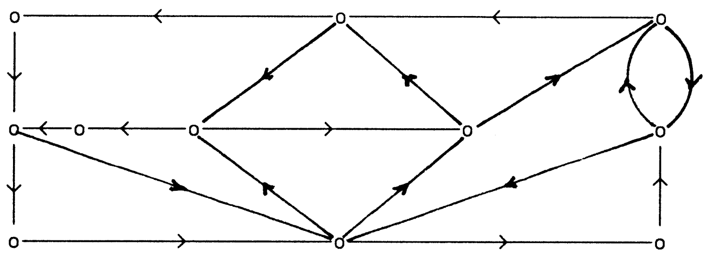


Opgave 4.

Beschouw een streng samenhangende graaf $D = (V,A)$. D is een Euler graaf als alle pijlen een ronde vormen.

a. Bewijs dat D een Euler graaf is dan en slechts dan als $\delta^+(v) = \delta^-(v)$ voor alle $v \in V$.

b. Bepaal een Euler-ronde in onderstaande graaf.

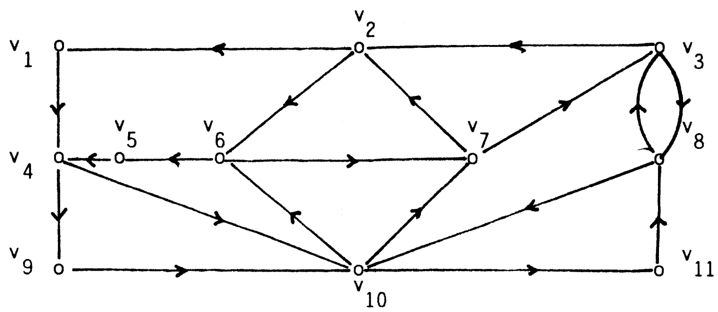


Oplossing:

a. $\rightarrow$ Alle pijlen vormen een ronde, dus $\delta^+(v) = \delta^-(v)$ voor alle v.

$\leftarrow$ Loop rond tot er een ronde is gevonden (dit kan, want ieder nieuw knooppunt waar we aankomen kunnen we ook weer weg). Laat deze ronde weg en herhaal dit procédé. Als er geen pijlen over zijn, dan voegen we de ronden aan elkaar tot één ronde.

b.



Een goede route is: $v_1 \rightarrow v_4 \rightarrow v_9 \rightarrow v_{10} \rightarrow v_{11} \rightarrow v_8 \rightarrow v_3 \rightarrow v_8 \rightarrow v_{10} \rightarrow v_7 \rightarrow v_3 \rightarrow v_2 \rightarrow v_6 \rightarrow v_5 \rightarrow v_4 \rightarrow v_{10} \rightarrow v_6 \rightarrow v_7 \rightarrow v_2 \rightarrow v_1$.

Opgave 5.

Zij V = {000,001,010,...,111}.

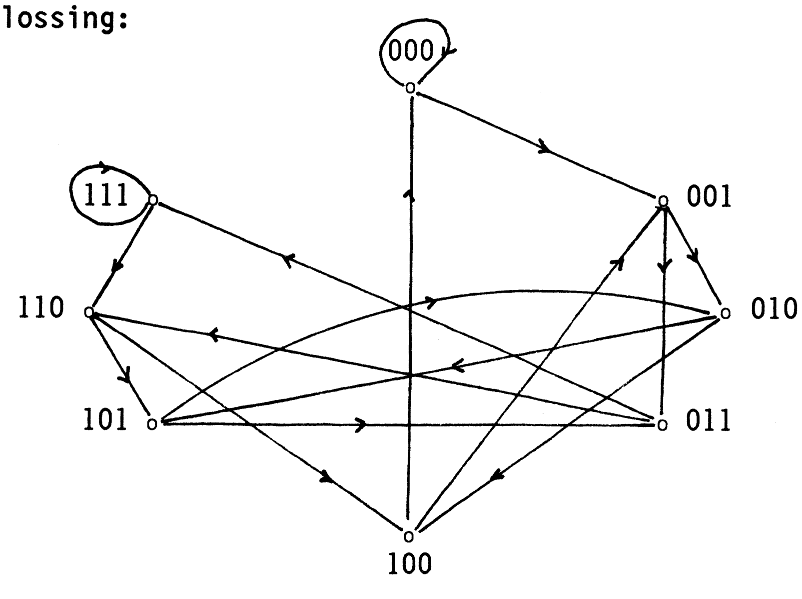
Laat $(a_1a_2a_3,\ b_1b_2b_3) \in A$ dan en slechts dan als $a_2 = b_1$ en $a_3 = b_2$ (de a's en b's zijn nullen of énen).

a. Teken de graaf D = (V,A).

b. Ga na of D een Euler graaf is.

c. Rangschik acht nullen en acht énen als een cyclische rij $a_1a_2 \ldots a_{16}$ zodanig dat $\{ a_ia_{i+1}a_{i+2}a_{i+3} \mid i=1,2,\ldots,16 \}$ de binaire getallen van 4 cijfers vormen (waarbij $a_{16+j} = a_j$ voor j = 1,2,3).

Oplossing:



a. De graaf is hierboven getekend.

b. De graaf is Euler, omdat $\delta^+(v) = \delta^-(v) = 2$ voor alle v.

c. Pijlen van het type $(a_1a_2a_3,\ a_2a_3a_4)$ associëren we met het binaire getal $a_1a_2a_3a_4$.

De Euler ronde 000 → 000 → 001 → 010 → 101 → 010 → 100 → 001 → 011 → 111 → 111 → 110 → 101 → 011 → 110 → 100 → 000

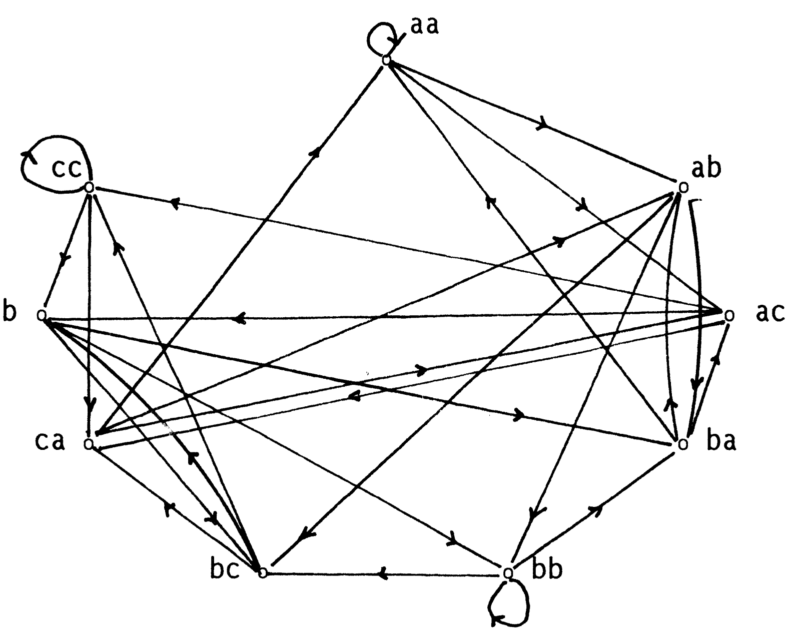
geeft de cyclische rij 0000101001111011 die de binaire getallen van vier cijfers vormt.

Opgave 6.

Vind een cyclische rangschikking van 9 a's, 9 b's en 9 c's, zodat elk van de 27 woorden van lengte 3 uit het alfabet {a,b,c} precies éénmaal voorkomt, als we telkens drie opeenvolgende letters nemen.

Oplossing:

Hetzelfde principe als in opgave 5: neem als knooppunten de 9 woorden van twee letters en verbind twee woorden als de laatste letter van de eerste gelijk is aan de eerste letter van de tweede.



In ieder knooppunt gaan drie pijlen uit en komen er drie binnen.

Een Euler ronde is:

aa → aa → ab → ba → ab → bb → bb → ba → ac → ca → ac → cc → cc → cb → bc → ca → aa → ac → cb → bb → bc → cc → ca → ab → bc → cb → ba → aa.

De corresponderende cyclische letterrij is:aaababbbacacccbcaacbbccabcb.

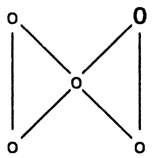
Paragraaf 4: Hamilton grafen

Opgave 1.

Geef een voorbeeld van een normale, samenhangende graaf die Euler is en niet-Hamilton, en een voorbeeld van een niet-Euler graaf die Hamilton is.

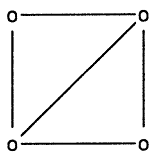
Oplossing:

a.



wel Euler, niet Hamilton

b.



niet Euler, wel Hamilton

Opgave 2.

a. Hoeveel verschillende Hamilton kringen zijn er in de K_n?

b. Hoeveel verschillende Hamilton kringen zijn er in de $K_{n,m}$?

Oplossing:

a. Start in v_1. Alle permutaties van de knooppunten $v_2, \cdots, v_n$ voldoen om de kring af te maken. Maar iedere kring is in twee richtingen te doorlopen. Dus $\frac{1}{2}(n-1)!$ verschillende kringen.

b. Als $n \neq m$, dan is er geen enkele Hamilton kring, want een kring in een bipartiete graaf gaat "heen en weer" en bevat dus evenveel knooppunten van beide verzamelingen.

Als $n = m$: Neem v_1 willekeurig. Ieder permutatie van de overige $n-1$ knooppunten uit de eerste kan worden gecombineerd met iedere permutatie van de n knooppunten uit de tweede knooppuntenverzameling. Ook kunnen we weer beide kanten oplopen:het aantal verschillende Hamilton kringen is $\frac{1}{2}(n-1)!n!$

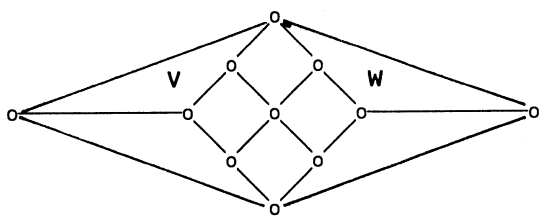
Opgave 3.

Zij $G = (V,E)$ een niet-gerichte graaf met $\delta(v) \geq 2$ voor alle $v \in V$. Laat $W \subseteq V$ zódat geen enkel tweetal knooppunten van W door een tak verbonden is.

a. Zij C een Hamilton kring in G, dan zijn er minstens $\Sigma_{w \in W}\, \delta(w) - 2 \cdot |W|$ takken die niet tot C behoren. Bewijs dit.

b. Toon aan dat als $m + 2 \cdot |W| < \Sigma_{w \in W}\, \delta(w) + n$ de graaf G geen Hamilton kring heeft.

c. Ga na of onderstaande graaf een Hamilton graaf is.



Oplossing:

a. Voor iedere $w \in W$ behoren hoogstens twee takken tot C, dus minstens $\delta(v)-2$ niet. Voor ieder tweetal w_1 en w_2 van W zijn de takken die niet tot C behoren disjunct, omdat geen enkel tweetal van W verbonden is. Er zijn dus minstens $\Sigma_{w \in W} [\delta(w)-2] = \Sigma_{w \in W} \delta(w) - 2 \cdot |W|$ takken die niet tot C behoren.

b. Stel wel, dan geldt $m \geq \Sigma_{w \in W} \delta(w) - 2 \cdot |W| + n$ (de term n komt van de Hamilton kring die n takken heeft): tegenspraak.

c. Neem voor W v en w (beide van graad drie) en de drie middelste knooppunten van graad vier.

Er geldt: $\left.\begin{array}{r} m + 2 \cdot |W| = 18 + 10 = 28 \\ \Sigma_{w \in W} \delta(w) + n = 18 + 11 = 29 \end{array}\right\}$ Volgens onderdeel b is er geen Hamilton kring.

Opgave 4.

a. Bewijs dat de lijngraaf van een normale Euler graaf zowel een Euler graaf als een Hamilton graaf is.

b. Bewijs dat de lijngraaf van een normale Hamilton graaf weer een Hamilton graaf is maar in het algemeen geen Euler graaf.

Oplossing:

a. Omdat iedere tak aan beide uiteinden grenst aan een oneven aantal takken, wordt de graad in de lijngraaf even voor ieder knooppunt: Euler graaf.
Alle takken in de oorspronkelijke graaf vormen een kring. In de lijngraaf gaat deze kring over in een Hamilton kring.

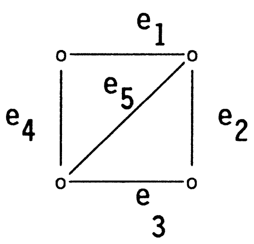
b. Construeer als volgt de Hamilton kring in de lijngraaf:

(i) De takken van de Hamilton kring in de oorspronkelijke graaf geven een kring in de lijngraaf.

(ii) Iedere tak e uit de oorspronkelijke graaf die niet tot de Hamilton kring behoort grenst aan twee takken, zeg f en g, die er wel toe behoren. In de lijngraaf zijn de corresponderende knooppunten v_e, v_f en v_g dus verbonden. v_f en v_g zijn opeenvolgende knooppunten in de Hamilton kring van de lijngraaf. Voeg nu v_e tussen v_f en v_g in .
Aldus wordt ieder knooppunt van de lijngraaf opgenomen in de kring.

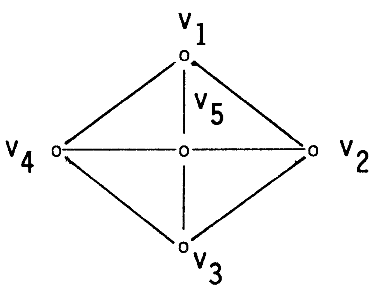
Onderstaand voorbeeld toont aan dat de lijngraaf van een Hamilton graaf in het algemeen geen Euler graaf is.

G:



Hamilton graaf

L(G):

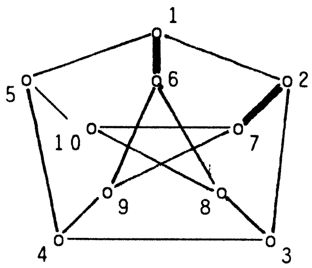


geen Euler graaf

Opgave 5.

Toon aan dat de Petersen-graaf geen Hamilton graaf is.

Oplossing:



Een Hamilton kring heeft een even aantal takken gemeen met iedere snede. Neem de snede $V_1 = \{1,2,3,4,5\}$ en $V_2 = \{6,7,8,9,10\}$.

a. Stel de snede heeft twee takken gemeen:

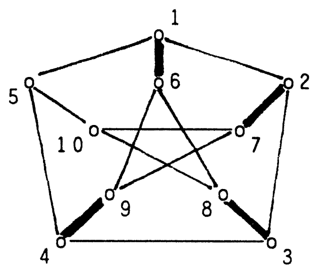
(i) (1 & 6) en (2 & 7): dan zitten (5 & 10), (4 & 9) en (3 & 8) niet in de kring. Dus is de kring van de vorm:

$$1 \to 5 \to 4 \to 3 \to 2 \to 7 \begin{array}{l} \nearrow \; 9 \to 6 \to 1 : \text{niet goed} \\ \searrow \; 10 \to 8 \to 6 \to 1 : \text{niet goed} \end{array}$$

(ii) (1 & 6) en (3 & 8): dan zitten (2 &7), (4 & 9) en (5 & 10) niet in de kring. Omdat er bij de knooppunten 2, 4 en 5 twee takken tot de kring moeten behoren, moeten (1 & 2) en (1 & 5) tot de kring behoren. Maar dan komen in knooppunt 1 drie takken van de kring bijeen.

De andere gevallen zijn equivalent met deze twee.

b. Stel de snede heeft vier takken met de kring gemeen: stel (1 & 6), (2 & 7), (3 & 8) en (4 & 9). Dan behoren (1 & 5), (5 & 4) wel en (1 & 2) niet tot de kring. Gaan we proberen de kring te construeren, dan krijgen we:



$$6 \to 1 \to 5 \to 4 \to 9 \begin{array}{l} \nearrow \; 6 : \text{niet goed} \\ \searrow \; 7 \to 2 \to 3 \to 8 \begin{array}{l} \nearrow \; 6 : \text{niet goed} \\ \searrow \; 10 : \text{niet goed} \end{array} \end{array}$$

Hiermee hebben we alle gevallen onderzocht: er is geen Hamilton kring.

Opgave 6.

Beschouw de 2^n binaire getallen van n bits (0 of 1).

De vraag luidt: Kunnen deze getallen zo in een cyclische rij worden opgeschreven dat opeenvolgende getallen slechts op één plaats verschillen (dit heet een Gray code). Voor n = 2 is een oplossing: 00,01,11,10,00.

a. Formuleer dit probleem als het probleem om een Hamilton kring in een graaf te bepalen.

b. Los het probleem op voor n = 3 en n = 4.

c. Geef aan hoe de oplossing voor n uit die van n-1 bepaald kan worden.

Oplossing:

a. Neem voor de knooppunten de 2^n getallen van n bits. Verbind twee knooppunten als de corresponderende getallen op één plaats verschillen. Een Hamilton kring komt dan overeen met een Gray code.

b. n = 3:

n = 3	000
	001
	011
	010
	110
	111
	101
	100
	000

n = 4:

n = 4	0000	1100
	0001	1101
	0011	1111
	0010	1110
	0110	1010
	0111	1011
	0101	1001
	0100	1000
		0000

c. Stel L_{n-1} is de lijst behorende bij de getallen van (n-1) bits. We krijgen dan een goede lijst voor de getallen van n bits door eerst de lijst L_{n-1} te nemen en voor alle getallen een 0 te plaatsen, en daarna dezelfde lijst L_{n-1} te nemen met overal een 1 er voor en dit laatste stuk in omgekeerde volgorde te doorlopen.

Opgave 7.

a. Ga na dat het volgende probleem neerkomt op het zoeken naar een Hamilton kring:
Gegeven is een groep van n mensen; van elk tweetal mensen is bekend of ze elkaar wel of niet kennen. Probeer deze mensen zodanig aan een ronde tafel te plaatsen, dat iedereen twee bekenden als buren heeft.

b. Toon aan dat voor oneven waarden van n de K_n $\frac{1}{2}(n-1)$ disjuncte Hamilton kringen heeft.

c. Veronderstel dat de in a. genoemde groep uit 11 personen bestaat die elkaar allemaal kennen. Hoe vaak kunnen ze dan aan een ronde tafel plaats nemen zódanig dat iedere persoon steeds andere buren heeft.

Oplossing:

a. Neem als knooppunten de n personen, en een tak tussen twee knooppunten als de desbetreffende personen elkaar kennen. In een Hamilton kring komt dan overeen met een plaatsing aan een ronde tafel zódat buren elkaar kennen.

b. Nummer de knooppunten met $v_0, v_1, \cdots, v_{2k}$ met $k = \frac{1}{2}(n-1)$. Plaats $v_1, v_2, \cdots, v_{2k}$ op een cirkel met v_0 als middelpunt.

Beschouw nu de volgende Hamilton kringen:

$C_1 : v_0, v_1, v_2, v_{2k}, v_3, v_{2k-1}, v_4, \cdots, v_{k+3}, v_k, v_{k+2}, v_{k+1}, v_0.$
$C_2 : v_0, v_2, v_3, v_1, v_4, v_{2k}, v_5, \cdots, v_{k+4}, v_{k+1}, v_{k+3}, v_{k+2}, v_0.$
$C_3 : v_0, v_3, v_4, v_2, v_5, v_1, v_6, \cdots, v_{k+5}, v_{k+2}, v_{k+4}, v_{k+3}, v_0.$
....

....

$C_k : v_0, v_k, v_{k+1}, v_{k-1}, v_{k+2}, v_{k-2}, v_{k+3}, \cdots, v_2, v_{2k-1}, v_1, v_{2k}, v_0.$

De kringen zijn disjunct, want bekijk de som van opeenvolgende indices modulo 2k:

C_1 : 1 , 3 , 2 , 3 , 2 , 3 , 2 , ⋯ , 2 , 3 , k+1.
C_2 : 2 , 5 , 4 , 5 , 4 , 5 , 4 , ⋯ , 4 , 5 , k+2.
C_3 : 3 , 7 , 6 , 7 , 6 , 7 , 6 , ⋯ , 6 , 7 , k+3.
....

....

C_k : k , 1 , 2k, 1 , 2k, 1 , 2k, ⋯ , 2k, 1 , 2k .

Hieruit zien we dat de takken disjunct zijn.

c. We hebben te maken met K_{11}, dus via onderdeel b zien we dat het op 5 manieren kan.

Opgave 8.

n Spelers doen mee aan een tennistoernooi, waarin iedereen speelt tegen alle andere n-1 spelers.

Toon aan dat aan het eind van het toernooi een rangorde van spelers kan worden gemaakt zódanig dat iedere speler heeft gewonnen van de speler die direct onder hem staat.

Oplossing:

Construeer de volgende gerichte graaf:

Neem als knooppunten de n spelers en trek een pijl van speler i naar speler j als i wint van j.

We moeten nu aantonen dat deze graaf een Hamilton pad heeft en doen dat met inductie naar n (n = 2 is triviaal).

Laat $1 \to 2 \to 3 \to \cdots \to n-1$ het Hamilton pad zijn voor de eerste n-1 spelers (inductie-veronderstelling). Beschouw nu speler n. Heeft speler n van speler 1 gewonnen, dan plaatsen we deze speler voorop. Zij in het andere geval i de eerste speler waar speler n van heeft gewonnen (als hij van niemand heeft gewonnen, dan plaatsen we hem achteraan). Plaats nu speler n tussen de spelers i-1 en i.

Opgave 9.

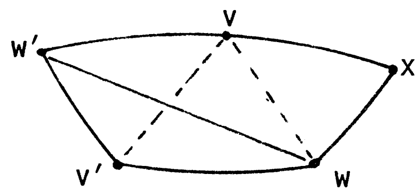
a. Als in een normale graaf voor ieder tweetal niet-aangrenzende knooppunten v en w geldt dat $\delta(v) + \delta(w) \geq n \quad (n \geq 3)$, dan is de graaf Hamilton. Bewijs dit.

b. Bewijs dat een normale graaf een kring van Hamilton heeft als het aantal takken minstens $\frac{1}{2}(n^2 - 3n + 6)$ is.

c. Zij $G = (V,E)$ een normale, samenhangende graaf met voor ieder tweetal niet-aangrenzende $v,w \in V \quad \delta(v) + \delta(w) \geq n-1$.
Toon aan dat G een semi-Hamilton graaf is.

Oplossing:

a. Het bewijs gaat volgens dezelfde redenering als de stelling van Dirac. Voeg zo min mogelijk, zeg k, knooppunten toe die met alle oorspronkelijke knooppunten verbonden worden zódat de nieuwe graaf $G' = (V',E')$ een Hamilton kring bevat. Beschouw in de kring het stuk $[v, x, w]$ met $v,w \in G$ en x een toegevoegd knooppunt. $(v \,\&\, w) \notin E$, want anders is x overbodig. Als $(w \,\&\, w') \in E'$, dan $(v \,\&\, v') \notin E'$, want anders is $[w, w', \cdots, v, v', \cdots, w]$ een Hamilton kring zonder knooppunt x. Dit impliceert:



$$\underbrace{\delta'(v)}_{\delta(v)+k} + \underbrace{\delta'(w)}_{\delta(w)+k} \leq \delta'(w) + [\underbrace{n+k-1}_{\substack{\text{alle knoop-}\\ \text{punten} \neq v}} \underbrace{-\;1}_{w} \underbrace{-\;(\delta'(w)-2)}_{\substack{\text{aangrenzend aan } w,\\ \text{behalve buren in H-kring}}} = n + k$$

Dus: $n \leq \delta(v) + \delta(w) \leq n - k$, d.w.z. $k = 0$: de oorspronkelijke graaf bevat een Hamilton kring.

b. Stel niet, dan is er volgens onderdeel a een tweetal knooppunten v en w met $\delta(v) + \delta(w) \leq n-1$. Voor het aantal takken in de graaf geldt dan:

$$\#\text{ takken} \leq \underbrace{\tfrac{1}{2}(n-2)(n-3)}_{\text{in } G-\{v\}-\{w\}} + \underbrace{(n-1)}_{\delta(v)+\delta(w)} = \tfrac{1}{2}(n^2-3n+4) < \tfrac{1}{2}(n^2-3n+6)\text{: tegenspraak.}$$

c. Voeg v_0 toe en verbind v_0 met alle andere knooppunten: dit geeft G'. Neem twee niet aangrenzende knooppunten v en w van G. Nu geldt:

$\delta'(v) + \delta'(w) = \delta(v) + 1 + \delta(w) + 1 \geq (n-1) + 2 = n+1$:
volgens onderdeel a heeft G' een Hamilton kring. Laat v_0 weg: G heeft een Hamilton keten.

Paragraaf 5: Bomen

Opgave 1.

Bewijs dat iedere boom een bipartiete graaf is.

Oplossing:

Kies een willekeurig knooppunt v. Omdat er tussen iedere v en w precies één keten is, ligt ieder knooppunt op een even of oneven afstand van v. Dit geeft een goede indeling in V_1 en V_2.

Opgave 2.

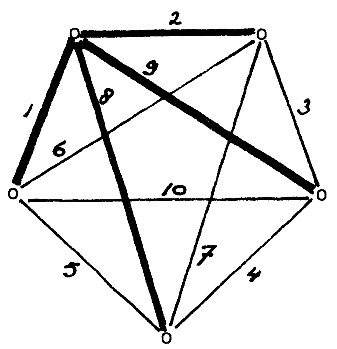
a. Bepaal voor de volledige graaf K_5 het kringgetal en het snedegetal.

b. Kies in de K_5 een voortbrengende boom en bepaal de daarmee geassocieerde kringbasis en snedebasis.

Oplossing:

a. In de K_5 is $n = 5$ en $m = 10$, zodat geldt:
kringgetal $= m-n+1 = 6$ en snedegetal $= n-1 = 4$.

b.



3	4	5	6	7	10	1	2	8	9	
1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	
0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	
0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	$C_T(G)$
0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	
0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	
0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	
0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	
1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	$S_T(G)$
0	1	1	0	1	0	0	0	1	0	
1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	

Opgave 3.

Zij n_1 en n_3 het aantal knooppunten van een boom met graad 1 resp. met graad groter dan of gelijk aan 3. Bewijs dat $n_1 \geq n_3 + 2$.

Oplossing:

Laat d_i het aantal knooppunten van graad i zijn, dan geldt:

$$\left.\begin{array}{r} 2m = 2(n-1) = \Sigma_{i=1}^{n} \delta(v_i) = d_1 + 2d_2 + 3d_3 + \cdots + (n-1)d_{n-1} \geq n_1 + 2d_2 + 3n_3 \\ n = n_1 + d_2 + n_3 \end{array}\right\}$$

Dus: $2(n_1 + d_2 + n_3 - 1) \geq n_1 + 2d_2 + 3n_3 \rightarrow n_1 \geq n_3 + 2$.

Opgave 4.

Zij G = (V,E) een samenhangende normale graaf. Toon aan dat er voor iedere tak e een voortbrengende boom is die e bevat.

Oplossing:

Kies een tak e. Construeer de boom T als volgt: start met n geïsoleerde knooppuntenen de tak e; voeg steeds een tak toe, behalve als hierdoor een kring ontstaat. Dit geeft een samenhangende graaf zonder kringen, dus een boom. Omdat we met e zijn gestart, behoort e tot de boom.

Opgave 5.

Zij T = (V,E) een boom. Toon aan dat ieder knooppunt v met $\delta(v) \geq 2$ een scheidingspunt is.

Oplossing:

Stel (v & w) en (v & x) in de boom en v is geen scheidingspunt. Dan zijn w en x in T-{v} verbonden door een keten. Deze keten tezamen met [w,v,x] geeft een kring in T: tegenspraak. v is dus een scheidingspunt.

Opgave 6.

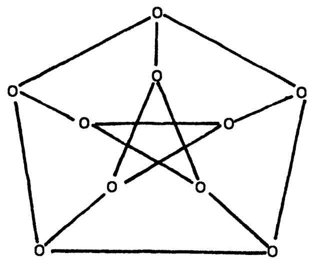
Laat T_1 en T_2 twee voortbrengende bomen zijn van een samenhangende graaf G. Toon aan dat als e een tak is van T_1, er een tak f van T_2 bestaat zodanig dat T_1-{e}+{f} ook een voortbrengende boom is van G.

Oplossing:

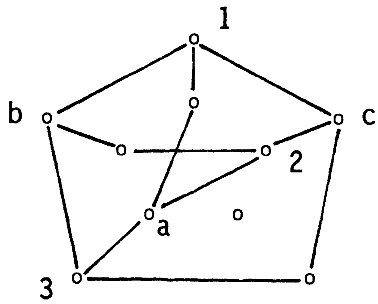
e is een brug, dus T_1-{e} heeft twee componenten, zeg G_1 en G_2, die zelf geen kringen bevatten (dus een boom zijn). T_2 is samenhangend, en bevat dus een tak f die G_1 met G_2 verbindt. T_1-{e}+{f} heeft n-1 takken en is samenhangend: dit is een voortbrengende boom van G.

Paragraaf 6: Vlakke grafen en duale grafen.

Opgave 1.
Laat zien dat nevenstaande graaf niet vlak is.



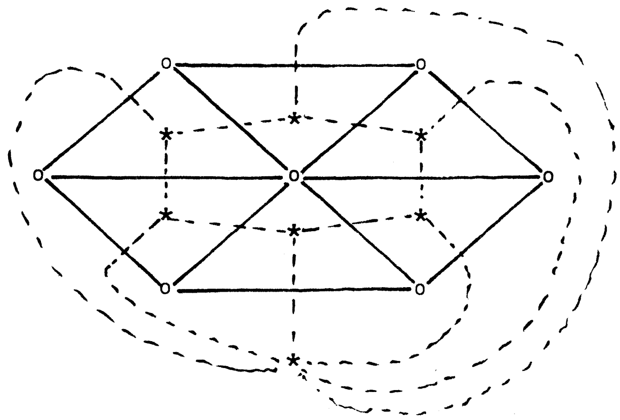
Oplossing:
Hiernaast is een deelgraaf getekend die op knooppunten van de graad 2 na isomorf met de Kuratokski graaf $K_{3,3}$ is: de verschillende knooppuntenverz. zijn aangegeven met {1, 2, 3} en {a, b, c}.



Opgave 2.
Toon aan dat de duale graaf van een wielgraaf weer een wielgraaf is.

Oplossing:
In de duale graaf is ieder knooppunt dat correspondeert met een "segment" van wiel G verbonden met het knooppunt dat correspondeert met het buitengebied. knooppunten corresponderend met aangrenzende "segmenten" zijn in de duale graaf verbonden, zodat ze een kring vormen. De duale graaf is dus inderdaad een wielgraaf.

Voorbeeld:



Opgave 3.
Bestaat er een vlakke graaf met 5 gebieden zodanig dat ieder tweetal gebieden een gemeenschappelijke grenslijn heeft?

Oplossing:
Stel wel, dan is de duale graaf (die ook een vlakke graaf is) de K_5: tegenspraak.

Opgave 4.

Zij G een normale, samenhangende vlakke graaf met m takken en minstens 3 knooppunten.

a. Toon aan dat $m \leq 3n-6$.

b. Toon aan dat er een knooppunt v is met $\delta(v) \leq 5$.

c. Toon aan dat als $n = 6$ en $m = 12$ ieder gebied precies 3 grenslijnen heeft.

Oplossing:

a. $\left.\begin{array}{l}\text{Volgens Euler is } n-m+r = 2 \\ \text{Ieder gebied heeft minstens 3} \\ \text{grenslijnen, dus } 2m \geq 3r\end{array}\right\}$ $6 = 3n-3m+3r \leq 3n-3m+2m = 3n-m$, dus is $m \leq 3n-6$.

b. Stel $\delta(v) \geq 6$ voor alle $v \in V$. Dan: $2m = \Sigma_{v \in V}\ \delta(v) \geq 6n \rightarrow m \geq 3n$: tegenspraak met onderdeel a.

c. Als $n = 6$ en $m = 12$, dan is volgens Euler $r = 8$. Dus $2m = 3r$, waaruit volgt dat ieder gebied precies 3 grenslijnen moet hebben.

Opgave 5.

Zij G een vlakke graaf. Toon aan dat G bipartiet is d.e.s.d. als G^* Euler is.

Oplossing:

$\rightarrow$ Omdat G bipartiet is heeft iedere kring een even aantal takken. In een vlak getekende graaf heeft ieder gebied dus een even aantal grenslijnen. In de duale graaf is daarom de graad van ieder knooppunt even, wat impliceert dat G^* een Euler graaf is.

$\leftarrow$ Nu is de graad van ieder knooppunt van de duale graaf even. In de duale van de duale heeft dus ieder gebied een even aantal grenslijnen. Omdat $G \cong G^{**}$ heeft ieder gebied van G een even aantal grenslijnen. Ook iedere kring van G heeft dus een even aantal takken, d.w.z. G is bipartiet.

Opgave 6.

Als ieder gebied in een normale, vlakke samenhangende graaf k grenslijnen heeft, dan is $m = \frac{k(n-2)}{k-2}$. Toon dit aan.

Oplossing:

$\left.\begin{array}{ll}\text{ieder gebied k grenslijnen} & \rightarrow 2m = kr \\ \text{relatie van Euler} & \rightarrow n-m+r = 2\end{array}\right\}$ $kn - km + 2m = 2k \rightarrow m = \frac{k(n-2)}{k-2}$.

Opgave 7.

Zij G een vlakke, samenhangende graaf waarin iedere kring minstens $k \geq 3$ takken bevat.

a. Toon aan dat $m \leq \frac{k(n-2)}{k-2}$.

b. Gebruik onderdeel a om aan te tonen dat de K_5, de $K_{3,3}$ en de graaf uit opgave 1 niet vlak zijn.

Oplossing:

a. $$\left.\begin{array}{l}\text{iedere kring minstens } k \text{ takken} \rightarrow 2m \geq kr \\ \text{relatie van Euler} \rightarrow n - m + r = 2\end{array}\right\} \begin{array}{l} kn - km + kr = 2k \rightarrow \\ kn - km + 2m \geq 2k \rightarrow m \leq \frac{k(n-2)}{k-2} \; .\end{array}$$

b. Stel dat een Kuratowski graaf wel vlak is, dan geldt:

K_5 : $k = 3$ $n = 5$ $m = 10$ volgens a: $10 \leq 9$: tegenspraak;

$K_{3,3}$: $k = 4$ $n = 6$ $m = 9$ volgens a: $9 \leq 8$: tegenspraak.

Voor de Petersen graaf geldt uit opgave 1 geldt:

$k = 5$ $n = 10$ $m = 15$ volgens a: $15 \leq 40/3$: tegenspraak.

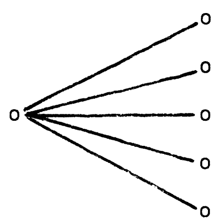
Opgave 8.

a. Als G vlak is, is dan de lijngraaf L(G) eveneens vlak?

b. Als G niet vlak is, is dan de lijngraaf L(G) eveneens niet vlak?

Oplossing:

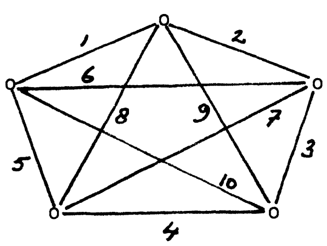
a. Neem voor G de hiernaast getekende graaf. Omdat ieder tweetal takken aangrenzend is, is de lijngraaf de K_5. Deze is dus niet vlak, terwijl G het wel is.



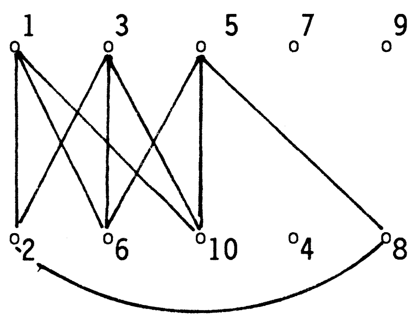
b. We zullen aantonen dat L(G) niet vlak is. Daarom is het voldoende om aan te tonen dat $L(K_5)$ en $L(K_{3,3})$ niet vlak zijn (immers een supergraaf van een niet vlakke graaf is eveneens niet vlak).

(i) K_5: Hieronder is de K_5 getekend en zijn de takken genummerd. Daarnaast staat een deelgraaf van de lijngraaf $L(K_5)$, die de graaf $K_{3,3}$ bevat (de nummering van de knooppunten van de $L(K_5)$ correspondeert met de nummering van de takken van de K_5).

K_5:

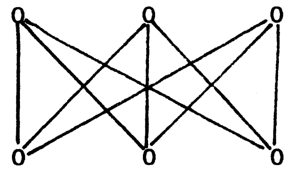


$L(K_5)$:

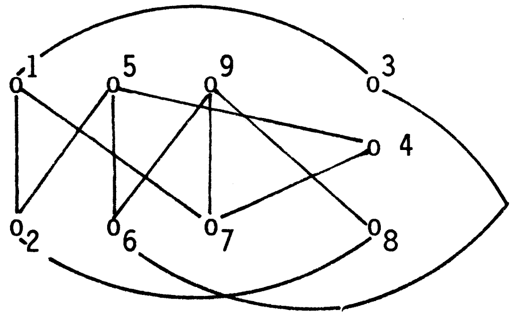


(ii) $K_{3,3}$: Hieronder is de $K_{3,3}$ getekend en een deelgraaf van $L(K_{3,3})$.
Deze bevat eveneens de $K_{3,3}$ en is dus ook niet vlak.

$K_{3,3}$:



$L(K_{3,3})$:



Opgave 9.

Zij G een vlakke samenhangende p-reguliere graaf met een duale graaf G^* die p^*-regulier is. Toon aan dat $(p-2)(p^*-2) < 4$.

Oplossing:

$$\left.\begin{array}{l} G \text{ p-regulier } \rightarrow 2m = pn \\ \text{relatie Euler} \rightarrow n - m + r = 2 \end{array}\right\} \; 2n - pn + 2r = 4 \;\rightarrow\; p - 2 = \frac{2(r-2)}{n}$$

Analoog krijgen we voor de duale graaf: $p^* - 2 = \frac{2(n-2)}{r}$

Hieruit volgt: $(p-2)(p^*-2) = 4\,\frac{(r-2)(n-2)}{n\cdot r} = 4\,\frac{r-2}{r}\cdot\frac{n-2}{n} < 4$.

Opgave 10.

Als G en de complementaire graaf $\bar{G}$ beide vlak zijn, dan is $n \leq 10$. Bewijs dit.

Oplossing:

We mogen wel aannemen dat G normaal en samenhangend is.

$$\left.\begin{array}{l} G \text{ vlak } \rightarrow m \leq 3n-6 \text{ (opgave 4a)} \\ \bar{G} \text{ vlak } \rightarrow \tfrac{1}{2}n(n-1)-m \leq 3n-6 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \tfrac{1}{2}n(n-1) \leq m+3n-6 \leq 6n-12 \rightarrow \\ n^2-13n+24 \leq 0 \rightarrow n \leq 10. \end{array}$$

HOOFDSTUK II: COMBINATORIEK

Paragraaf 7: Permutaties, combinaties

Opgave 1.

Op hoeveel verschillende manieren kunnen 5 mannen en 5 vrouwen aan een ronde tafel gaan zitten z.d.d. elke man tussen 2 vrouwen zit?

Oplossing:

Het doet er niet toe waar de eerste man gaat zitten.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Man 2 t/m 5 geeft } 4! \text{ permutaties}\\ \text{Vrouw 1 t/m 5 geeft } 5! \text{ permutaties}\end{array}\right\} \text{ Totaal } 4!5! = 2880 \text{ manieren.}$$

Opgave 2.

Een collegezaal die 201 zitplaatsen heeft wordt gebruikt om een college aan 200 studenten te geven. Op hoeveel manieren kan de eerste rij, die 20 plaatsen heeft, worden bezet?

Oplossing:

Voeg een "dummy" student toe, die correspondeert met de lege plaats.

Als we op de volgorde letten kan de eerste rij op $p(201,20) = \frac{201!}{181!}$ manieren worden bezet; als we niet op de volgorde letten op $c(201,20) = \frac{201!}{181!20!}$ manieren.

Opgave 3.

Toon aan dat voor ieder natuurlijk getal ngeldt: $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\cdot 2^{n-1}$.

Oplossing:

$$\Sigma_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \Sigma_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\cdot\Sigma_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = n\cdot\Sigma_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n\cdot 2^{n-1} .$$

Opgave 4.

Bewijs met combinatorische argumenten dat voor $n \le i \le m$ geldt:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m-n}{i-k} = \binom{m}{i}$$

Oplossing:

$\binom{m}{i}$ = # manieren om i elementen uit m elementen te kiezen (omdat $i \geq n$)

$= \Sigma_{k=0}^{n}$ # manieren om k elementen uit n en i-k elementen uit m-n te kiezen

$= \Sigma_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{m-n}{i-k}$.

Opgave 5.

Zij $h(n,k)$ met $k \geq n$ het aantal manieren om k voorwerpen te kleuren met n kleuren z.d.d. ieder voorwerp één kleur heeft en iedere kleur minstens één keer wordt gebruikt. Bewijs dat:

a. $h(n,k)$ is de coëfficiënt van x^k in $(x+x^2+x^3+\cdots)^n$.

b. $h(n,k) = \binom{k-1}{n-1}$.

Oplossing:

a. $h(n,k)$ = aantal manieren om k objecten over n dozen te verdelen zdd. iedere doos minstens één element bevat.

De coëfficiënt van x^k in $(x+x^2+\cdots)(x+x^2+\cdots)\cdots\cdots(x+x^2+\cdots)$, n factoren, is: $\sum_{\substack{t_1,t_2,\ldots,t_n \geq 1 \\ t_1+t_2+\cdots+t_n=k}} 1 = h(n,k)$.

b. Iedere doos wordt minstens één keer gebruikt. De overige k-n voorwerpen moeten nog over n dozen worden verdeeld; dit kan op $f(n,k-n) = \binom{k-1}{n-1}$ manieren.

Opgave 6.

Bewijs dat voor $0 < k \leq n$: $\binom{n+k-1}{n-1} = \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1}\binom{n}{i}$.

Oplossing:

$f(n,k) = \binom{n+k-1}{n-1}$ = aantal manieren om k objecten over n dozen te verdelen. Voor $1 \leq i \leq k$ kan er in i dozen iets zitten en zijn er $\binom{n}{i}$ i-tallen dozen.

Stel we hebben i dozen gekozen, dan moeten k voorwerpen over deze i dozen verdeeld worden zdd. iedere doos iets bevat. Volgens opgave 5 kan dit op $h(i,k) = \binom{k-1}{i-1}$ manieren.

Tellen we dit voor alle waarden van i op, dan krijgen we: $\Sigma_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1}\binom{n}{i}$.

Paragraaf 8: Recurrente betrekkingen, voortbrengende functies.

Opgave 1.

Los de volgende recurrente betrekking op:

$$\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, & n \geq 3 \\ a_1 = a_2 = 1 \end{cases}$$

Oplossing:

De karakteristieke vergelijking is: $x^2-5x+6 = 0 \rightarrow$ de wortels zijn $\alpha = 2$ en $\beta = 3$, zodat $a_n = K_1\, 2^n + K_2\, 3^n$:

$$\left.\begin{matrix} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} 2K_1 + 3K_2 = 1 \\ 4K_1 + 9K_2 = 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow K_1 = 1 \text{ en } K_2 = -\tfrac{1}{3} \rightarrow a_n = 2^n - 3^{n-1}.$$

Opgave 2

Los de volgende recurrente betrekking op:

$$\begin{cases} a_n = 4(a_{n-1} - a_{n-2}), & n \geq 3 \\ a_1 = 0,\ a_2 = 4 \end{cases}$$

Oplossing:

De karakteristieke vergelijking is: $x^2-4x+4 = 0 \rightarrow$ de wortels zijn $\alpha = \beta = 2$, zodat $a_n=(K_1 + nK_2)\, 2^n$.

$$\left.\begin{matrix} a_1 = 0 \\ a_2 = 4 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} 2K_1 + 2K_2 = 0 \\ 4K_1 + 8K_2 = 4 \end{matrix}\right\} \rightarrow K_1 = -1 \text{ en } K_2 = 1 \rightarrow a_n = (n-1)2^n .$$

Opgave 3

a. Leid een recurrente betrekking af voor de waarde a_n van de nxn determinant

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

b. Bepaal a_n door de recurrente betrekking op te lossen.

Oplossing:

a. Ontwikkeling van de determinant geeft de betrekking:

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}\ , \ n \geq 3 \\ a_1 = 2,\ a_2 = 3 \end{cases}$$

b. De karakteristieke vergelijking is: $x^2-2x+1 = 0 \rightarrow$ de wortels zijn beide -1, zodat $a_n = (K_1 + nK_2)\ 1^n$.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} K_1 + K_2 = 2 \\ K_1 + 2K_2 = 3 \end{array}\right\} \rightarrow K_1 = 1 \text{ en } K_2 = 1 \rightarrow a_n = 1 + n\ .$$

Opgave 4

a. Leid een recurrente betrekking af voor de waarde a_n van de nxn determinant

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 0 & . & . & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

b. Bepaal a_n door de recurrente betrekking op te lossen.

Oplossing:

a. Ontwikkeling van de determiniant geeft:

$$\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} - 4a_{n-2}\ , \ n \geq 3 \\ a_1 = 5,\ a_2 = 21 \end{cases}$$

b. De karakteristieke vergelijking is: $x^2-5x+4 = 0 \rightarrow$ de wortels zijn $\alpha = 1$ en $\beta = 4$, zodat $a_n = K_1\ 1^n + K_2\ 4^n$.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 5 \\ a_2 = 21 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} K_1 + 4K_2 = 5 \\ K_1 + 16K_2 = 21 \end{array}\right\} \rightarrow K_1 = -\tfrac{1}{3} \text{ en } K_2 = \tfrac{4}{3} \rightarrow a_n = \tfrac{1}{3}(4^{n+1} - 1).$$

Opgave 5

Zij a_n een aantal rijtjes met n cijfers uit {0,1,2} zódanig dat een cijfer 1 op de j-de plaats niet gevolgd wordt door een 1 of een 2 op plaats j+1, $1 \leq j \leq n-1$.

a. Toon aan dat

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}, \ n \geq 3 \\ a_1 = 3, \ a_2 = 7 \end{cases}$$

b. Bepaal a_n voor $n \geq 1$.

Oplossing:

a. $n = 1$: alle drie de mogelijkheden zijn toegestaan, dus $a_1 = 3$.

$n = 2$: alle 9 mogelijkheden zijn toegestaan, behalve 11 en 12: $a_2 = 7$.

a_n: zet op de eerste plaats een 0 of een 2 en daar achter alle a_{n-1} mogelijkheden met n-1 plaatsen;

zet op de eerste plaats een 1, dan moet op plaats 2 een 0 staan, en er achter kunnen de a_{n-2} mogelijkheden met n-2 plaatsen.

Dus: $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$, $n \geq 3$.

b. De karakteristieke vergelijking is: $x^2-2x-1 = 0 \rightarrow$ de wortels zijn $\alpha = 1+\sqrt{2}$ en $\beta = 1-\sqrt{2}$, zodat $a_n = K_1(1 + \sqrt{2})^n + K_2(1 - \sqrt{2})^n$.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 3 \\ a_2 = 7 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} K_1(1+\sqrt{2}) + K_2(1-\sqrt{2}) = 3 \\ K_1(3+2\sqrt{2}) + K_2(3-2\sqrt{2}) = 7 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} K_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2}) \\ K_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{2}) \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$a_n = \frac{1}{2} [(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}] \ , \ n \geq 1.$$

Opgave 6

Bepaal de oplossing van de recurrente betrekking:

$$\begin{cases} a_n^2 - 5a_{n-1}^2 + 4a_{n-2}^2 = 0 \ , \ n \geq 3 \\ a_1 = 4, \ a_2 = 13 \end{cases}$$

Oplossing:

Stel $b_n = a_n^2$. Dan luidt de betrekking: $b_n - 5b_{n-1} + 4b_{n-2} = 0$, met als begin- beginvoorwaarden $b_1 = 16$ en $b_2 = 169$.

De karakteristieke vergelijking is: $x^2-5x+4 = 0 \rightarrow$ de wortels zijn $\alpha = 1$ en $\beta = 4$, zodat $b_n=K_1 1^n + K_2 4^n$.

$$\left.\begin{array}{l} b_1 = 16 \\ b_2 = 169 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} K_1 + 4K_2 = 16 \\ K_1 + 16K_2 = 169 \end{array}\right\} \rightarrow K_1 = -35 \text{ en } K_2 = \frac{51}{4} \rightarrow$$

$$b_n = -35 + 51 \cdot 4^{n-1} \rightarrow a_n = \sqrt{[-35 + 51 \cdot 4^{n-1}]} \ , \ n \geq 1.$$

Opgave 7

Zij a_n het aantal rijtjes van n cijfers uit {0,1} waarin geen twee opeenvolgende nullen zijn toegestaan.

a. Toon aan dat

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\,, \; n \geq 3 \\ a_1 = 2\,, \; a_2 = 3 \end{cases}$$

b. Bepaal a_n.

Oplossing:

a. a_1: 0 of 1 $\rightarrow a_1 = 2$

a_2: 01, 10 of 11 $\rightarrow a_2 = 3$

a_n: een 1 met er achter alle a_{n-1} mogelijkheden

01 en er achter alle a_{n-2} mogelijkheden

$\Big\}\; a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

b. Omdat dit de Fibonaccirij is geldt: $a_n = K_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + K_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 2 \\ a_2 = 3 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} K_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + K_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 2 \\ K_1\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + K_2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = 3 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} K_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ K_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{array}$$

Dus $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}$.

Opgave 8

Zij a_n het aantal rijtjes uit {1,2} waarvan de som n is, $n \geq 1$. Bepaal a_n.

Oplossing:

Het is direct duidelijk dat $a_1 = 1$ en $a_2 = 2$.

Voor een willekeurige $n \geq 3$ geldt dat een goede rij wordt verkregen door: op de eerste plaats een 1, gevolgd door een rij met som n-1 of op de eerste plaats een 2, gevolgd door een rij met som n-2: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

a_n is dus de Fibonacci rij uit het collegedictaat:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}.$$

Opgave 9

Los de volgende recurrente betrekking op:

$$\begin{cases} a_n + 2a_{n-1} + a_{n-2} = 2^n \ , \ n \geq 3 \\ a_1 = 0 \ , \ a_2 = 3 \end{cases}$$

Oplossing:

Beschouw eerst de homogene vergelijking. De karakteristieke vergelijking er van is $x^2+2x+1 = 0$ met wortels $\alpha = \beta = -1$. Hieruit volgt: $b_n = (K_1 + nK_2)(-1)^n$.

Als speciale oplossing proberen wij $c_n = K \cdot 2^n$:

$K \cdot 2^n + 2K \cdot 2^{n-1} + K \cdot 2^{n-2} = 2^n \rightarrow K = \frac{4}{9}$.

Dus: $a_n = (K_1 + nK_2)(-1)^n + \frac{4}{9} 2^n$.

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 0 \rightarrow (K_1 + K_2)(-1) + \tfrac{8}{9} = 0 \\ a_2 &= 3 \rightarrow (K_1 + 2K_2)(-1)^2 + \tfrac{16}{9} = 3 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} K_1 &= \tfrac{5}{9} \\ K_2 &= \tfrac{1}{3} \end{aligned} \rightarrow a_n = \frac{1}{9} [(5 + 3n)(-1)^n + 2^{n+2}]$$

Opgave 10

n ringen van verschillende grootte zijn in toenemende grootte (van boven naar beneden) om een staaf A geplaatst. De bedoeling is de ringen één voor één naar een andere staaf B over te brengen. Er is een derde staaf beschikbaar waar de ringen tijdelijk op kunnen worden geplaatst. Gedurende het hele proces mag op geen enkele staaf ooit een ring op een kleinere ring worden geplaatst. Hoeveel verplaatsingen zijn minimaal nodig om alle ringen van A naar B over te brengen?

Oplossing:

$a_1 = 1$ en $a_2 = 3$ (bovenste om C, onderste om B en dan C op B).

Voor a_n geldt de volgende recursie: breng de eerste n-1 ringen op C over (dit vereist a_{n-1} verplaatsingen), zet vervolgens de onderste ring op B, en breng de n-1 ringen van C naar B (weer a_{n-1} verplaatsingen):

$$a_n = a_{n-1} + 1 + a_{n-1} = 2a_{n-1} + 1 \ , \ n \geq 2.$$

Beschouw eerst de homogene vergelijking. De karakteristieke vergelijking er van is $x^2-2x = 0$ met wortels $\alpha = 0$ en $\beta = 2$. Hieruit volgt: $b_n = K_1 \cdot 2^n$.

Als speciale oplossing proberen wij $c_n = K \rightarrow K = -1$.

Dit geeft de oplossing: $a_n = K_1 2^n - 1$. Omdat $a_1 = 1$ geldt: $a_n = 2^n - 1$.

Opgave 11

Laat $a_n = \Sigma_{k=1}^{n} k^2$, $n \geq 1$.

a. Leid een recurrente betrekking af voor a_n.

b. Bepaal a_n.

Oplossing:

a. $a_n = a_{n-1} + n^2$, $n \geq 2$ en $a_1 = 1$.

b. Beschouw eerst de homogene vergelijking. De karakteristieke vergelijking er van is $x^2-x = 0$ met wortels $\alpha = 0$ en $\beta = 1$. Hieruit volgt: $b_n = K_1$.
Als speciale oplossing proberen wij $c_n = K_2n^3 + K_3n^2 + K_4n$.
$c_n = c_{n-1} + n^2 \rightarrow K_2(3n^2-3n+1) + K_3(2n-1) + K_4 = n^2$. Hieruit volgt:
$K_2 = \frac{1}{3}$, $K_3 = \frac{1}{2}$, $K_4 = \frac{1}{6}$. Hieruit volgt:
$a_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n + K_1$ en $a_1 = 1 \rightarrow a_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$, $n \geq 1$.

Opgave 12

Bepaal de oplossing van de recurrente betrekking

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + n^2-3 \ , \ n \geq 2 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

Oplossing:

Beschouw eerst de homogene vergelijking. De karakteristieke vergelijking er van is $x^2-3x = 0$ met wortels $\alpha= 0$ en $\beta = 3$. Hieruit volgt:
$b_n = K_1 \cdot 3^n$. Als speciale oplossing proberen wij $c_n = K_2n^2 + K_3n + K_4$.
Uit de recurrente betrekking volgt:

$K_2n^2 + K_3n + K_4 = 3[K_2(n-1)^2 + K_3(n-1) + K_4] + n^2-3$, d.w.z.

$K_2 = 3K_2+1 \rightarrow K_2 = -\frac{1}{2}$; $K_3 = -6K_2+3K_3 \rightarrow K_3 = -\frac{3}{2}$; $K_4 = 3K_2-3K_3+3K_4-3 \rightarrow K_4 = 0$.

Dit geeft: $a_n = -\frac{1}{2}(n^2+3n) + K_1 3^n$ en $a_1 = 1 \rightarrow a_n = 3^n - \frac{1}{2}(n^2+3n)$.

Opgave 13

Bepaal de oplossing van de recurrente betrekking

$$\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 3 \ , \ n \geq 3 \\ a_1 = 1 \ , \ a_2 = 4 \end{cases}$$

Oplossing:

Beschouw eerst de homogene vergelijking. De karakteristieke vergelijking er van is $x^2-3x+2 = 0$ met wortels $\alpha = 1$ en $\beta = 2$. Hieruit volgt: $b_n = K_1 + K_2 2^n$.
Als speciale oplossing proberen wij $c_n = K_3 n$.
Uit de recurrente betrekking volgt: $K_3 n = 3K_3(n-1) - 2K_3(n-2) + 3 \rightarrow K_3 = -3$.
Dus is $a_n = K_1 + K_2 2^n - 3n$.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = 1 \rightarrow K_1+2K_2-3 = 1 \\ a_2 = 4 \rightarrow K_1+4K_2-6 = 4 \end{array}\right\} \begin{array}{l} K_1 = -2 \text{ en } K_2 = 3, \text{ waaruit volgt:} \\ a_n = 3\cdot 2^n - 3n - 2. \end{array}$$

Opgave 14

Zij a_n het aantal getallen van n cijfers uit {1,2,3,4,5} dat deelbaar is door 3.

a. Toon aan dat a_n voldoet aan de recurrente betrekking

$$\begin{cases} a_n + a_{n-1} = 2\cdot 5^{n-1}, & n \geq 2 \\ a_1 = 1. \end{cases}$$

b. Bepaal a_n.

Oplossing:

a. Voor n = 1 voldoet alleen 3, dus $a_1 = 1$.
Voor een willekeurige waarde van $n \geq 2$ kunnen we opmerken dat uit de 5^{n-1} rijtjes van n-1 cijfers de volgende rijtjes die deelbaar zijn door 3 (dit is namelijk equivalent met de som der cijfers is deelbaar door 3) worden verkregen:
plaats achter de a_{n-1} rijtjes die reeds deelbaar zijn door 3 een 3;
plaats achter de overige $5^{n-1} - a_{n-1}$ rijtjes een 1 of een 4 als het daardoor deelbaar wordt door 3, en anders een 2 of een 5:

$$a_n = a_{n-1} + 2(5^{n-1} - a_{n-1}) \rightarrow a_n + a_{n-1} = 2\cdot 5^{n-1}.$$

b. Beschouw eerst de homogene vergelijking. De karakteristieke vergelijking er van is $x^2+x = 0$ met wortels $\alpha = 0$ en $\beta = -1$. Hieruit volgt: $b_n = K_1\cdot(-1)^n$.
Als speciale oplossing proberen wij $c_n = K_2 5^n$.
Uit de recurrente betrekking volgt: $K_2 5^n + K_2 5^{n-1} = 2\cdot 5^{n-1} \rightarrow K_2 = \frac{1}{3}$.
Dus: $a_n = K_1(-1)^n + \frac{1}{3}\cdot 5^n$ en $a_1 = 1 \rightarrow a_n = \frac{1}{3}[2\cdot(-1)^n + 5^n]$.

Opgave 15

Los de volgende recurrente betrekking op met de methode van voortbrengende functies:

$$\begin{cases} a_{n+1} - a_n = 3^n \ , \ n \geq 0 \\ a_0 = 1 \end{cases} .$$

Oplossing:

Uit de recurrente betrekking volgt:

$$\Sigma_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} - \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = \Sigma_{n=0}^{\infty} 3^n x^{n+1} \ , \text{ zodat}$$

$$f(x) - 1 - x \cdot f(x) = \frac{x}{1 - 3x} \rightarrow f(x) = \frac{1 - 2x}{(1 - x)(1 - 3x)}$$

Via breuksplitsing krijgen we:

$$f(x) = \frac{-1.5x + 1}{1 - 3x} + \frac{0.5x}{1 - x} = (-1.5x + 1) \ \Sigma_{n=0}^{\infty} 3^n x^n + 0.5x \ \Sigma_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$= 1 + \Sigma_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{2}(3^n + 1) x^n \rightarrow a_n = \tfrac{1}{2}(3^n + 1), \ n \geq 0.$$

Opgave 16

Los de volgende recurrente betrekking op met de methode van voortbrengende functies:

$$\begin{cases} a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = n \ , \ n \geq 0 \\ a_0 = 1 \ , \ a_1 = 2 \end{cases} .$$

Oplossing:

Uit de recurrente betrekking volgt:

$$\Sigma_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} - \Sigma_{n=0}^{\infty} 2a_{n+1} x^{n+2} + \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = \Sigma_{n=0}^{\infty} n \ x^{n+2} \ , \text{ zodat}$$

$$[f(x) - 1 - 2x] - 2x[f(x) - 1] + x^2 f(x) = x^3 \ \Sigma_{n=0}^{\infty} n \ x^{n-1} = x^3(1 - x)^{-2} .$$

Dus $\quad f(x) \ \{1 - 2x + x^2\} = 1 + x^3(1 - x)^{-2}$.

Hieruit volgt:

$$f(x) = (1 - x)^{-2} + x^3(1 - x)^{-4} = \Sigma_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{1} x^k + \Sigma_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^{k+3} .$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + \Sigma_{k=3}^{\infty} \left\{ \binom{k+1}{1} + \binom{k}{3} \right\} x^k .$$

Dit geeft: $a_n = \binom{n+1}{1} + \binom{n}{3} = \frac{1}{6}(n^3 - 3n^2 + 8n + 6)$, $n \geq 3$. Deze formule blijkt ook te gelden voor $n = 0$, 1 en 2.

Opgave 17

Stel we tekenen in het platte vlak n gesloten krommen. Als elk van deze krommen elke andere in precies twee punten snijdt en geen enkel drietal door één punt gaat, in hoeveel gebieden wordt het platte vlak dan door deze krommen verdeeld?

Los dit vraagstuk op door de volgende onderdelen te beantwoorden, waarin a_n het gevraagde aantal gebieden voorstelt.

a. Toon aan dat a_n voldoet aan de recurrente betrekking

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + 2(n-1) \ , \ n \geq 2 \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

b. Laat m.b.v. de voortbrengende functie zien dat $a_n = n^2 - n + 2$, $n \geq 1$.

Oplossing:

a. Het is duidelijk dat $a_1 = 2$ en $a_2 = 4$. Voor de bepaling van a_n geldt: als de n-de kromme van een snijpunt naar een volgend snijpunt loopt, dan wordt het gebied in twee stukken gedeeld; dit gebeurt $2(n-1)$ keer, zodat $a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$.

b. Uit de recurrente betrekking volgt:

$$\Sigma_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \Sigma_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \Sigma_{n=2}^{\infty} 2(n-1)\ x^n \text{ , dus}$$

$$f(x) - 2x = xf(x) + 2x^2(1-x)^{-2} \rightarrow f(x) = 2x(1-x)^{-1} + 2x^2(1-x)^{-3} \rightarrow$$

$$f(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} 2x^{n+1} + \Sigma_{n=0}^{\infty} 2\binom{n+2}{2}x^{n+2} = 2x + \Sigma_{n=2}^{\infty} \left\{2 + 2\binom{n}{2}\right\} x^n \ .$$

Hieruit volgt: $a_n = n^2 - n + 2$, $n \geq 1$.

Opgave 18

Zij f(x) de voortbrengende functie van de Fibonacci getallen gegeven door:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n \geq 3, \text{ met } a_1 = 1 \text{ en } a_2 = 2 \ .$$

a. Toon aan dat $(1-x-x^2)f(x) = x+x^2$.

b. Leid af dat $a_n = \Sigma_{k=0}^{n/2} \binom{n-k}{k}$.

Oplossing:

a. Uit de recurrente betrekking volgt:

$$\Sigma_{n=3}^{\infty} a_n x^n = \Sigma_{n=3}^{\infty} a_{n-1} x^n + \Sigma_{n=3}^{\infty} a_{n-2} x^n \text{ , zodat}$$

$$f(x) - x - 2x^2 = x\{f(x)-x\} + x^2 f(x) \rightarrow [1-x-x^2]f(x) = x+x^2 \ .$$

b. $f(x) = \dfrac{(x+x^2)}{1-(x+x^2)} = \Sigma_{k=0}^{\infty} (x+x^2)^{k+1} = \Sigma_{k=1}^{\infty} (x+x^2)^k$

$= \Sigma_{k=1}^{\infty} \Sigma_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^{k+i}$ = (substitueer $k+i = n$ en merk op dat $i \le k$)

$= \Sigma_{n=1}^{\infty} \Sigma_{i=0}^{n/2} \binom{n-i}{i} x^n \quad \rightarrow \quad a_n = \Sigma_{i=0}^{n/2} \binom{n-i}{i}$.

Opgave 19

Zij a_n het aantal manieren om haakjes te plaatsen bij het vermenigvuldigen van n getallen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ op een zakrekenmachine.

Dus $a_2 = 1$ en $a_3 = 2$. Neem $a_1=1$ (per definitie).

a. Bewijs dat $a_n = a_1a_{n-1} + a_2a_{n-2} + \ldots + a_{n-1}a_1$, $n \ge 2$.

b. Toon aan dat de voortbrengende functie $f(x) = \Sigma_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ voldoet aan:

$$\{f(x)\}^2 - f(x) + x = 0 \quad .$$

c. Leid af dat $a_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$, $n \ge 1$.

Oplossing:

a. Het laatste paar haakjes pakt twee groepen, een linker en een rechter, samen. De linker groep kan 0, 1, ... , $n-2$ paren haakjes bevatten. Bij k paren haakjes kan dit op a_{k+1} manieren gebeuren (voor n getallen zijn $n-1$ paren haakjes nodig). Hieruit volgt:

$a_n = a_1a_{n-1} + a_2a_{n-2} + \cdots + a_{n-1}a_1$, $n \ge 2$.

b. Uit onderdeel a volgt: $\Sigma_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \Sigma_{n=2}^{\infty} \left(\Sigma_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} \right) x^n$.

Omdat $\{f(x)\}^2 = \Sigma_{n=1}^{\infty} \Sigma_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} x^n$, kunnen we schrijven:

$\{f(x)\}^2 = \Sigma_{n=2}^{\infty} a_n x^n = f(x) - x$.

c. Door de kwadratische vergelijking in $f(x)$ uit onderdeel b op te lossen krijgen we $f(x) = \frac{1}{2}[1 \pm \surd(1-4x)]$. Er geldt:

$$\surd(1-4x) = 1 + \Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k-1}} \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!} (-4x)^k = 1 - \Sigma_{k=1}^{\infty} \frac{2(2k-2)!}{k!(k-1)!} x^k$$

Hieruit volgt: $f(x) = \Sigma_{k=1}^{\infty} \dfrac{(2k-2)!}{k!(k-1)!} x^k$.

Dus $a_n = \dfrac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} = \dfrac{1}{n}\dbinom{2n-2}{n-1}$.

Opgave 20

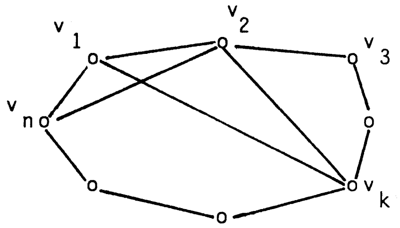
Op hoeveel manieren kan een regelmatige n-hoek in driehoeken worden verdeeld met behulp van diagonalen die elkaar niet snijden?

<u>Opmerking:</u> De knooppunten zijn genummerd en er wordt niet gelet op isomorfie.

Oplossing:

Zij a_n het aantal manieren waarop de verdeling kan plaats vinden, $n \geq 3$.

Dus $a_3 = 1$, $a_4 = 2$ en $a_5 = 5$.



Beschouw v_1: òf er is geen diagonaal in v_1, dan zijn v_2 en v_n verbonden en kan de verdeling op a_{n-1} manieren.

òf er is een diagonaal in v_1; veronderstel dat v_1 via een diagonaal verbonden is met v_k en niet met v_i $(1 \leq i \leq k-1)$. Dan is v_2 ook verbonden met v_k (iedere figuur is een driehoek).

$\{v_2,v_3,\ldots,v_k\}$ biedt a_{k-1} mogelijkheden en $\{v_k,v_{k+1},\ldots,v_n,v_1\}$ a_{n-k+2}: in totaal dus $a_{k-1}a_{n-k+2}$ mogelijkheden, $3 \leq k \leq n-1$.

Hieruit volgt:
$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_2a_{n-1} + a_3a_{n-2} + \cdots + a_{n-2}a_3 \\ &= 2a_2a_{n-1} + a_3a_{n-2} + \cdots + a_{n-2}a_3 \\ &= a_2a_{n-1} + a_3a_{n-2} + \cdots + a_{n-2}a_3 + a_{n-1}a_2 \ , \ n \geq 3 \ . \end{aligned}$$

We gaan deze recurrente betrekking oplossen met behulp van voortbrengende functies.

$$\Sigma_{n=3}^{\infty}\, a_n x^{n+1} = \Sigma_{n=3}^{\infty} \left[\Sigma_{k=2}^{n-1}\, a_k a_{n+1-k} \right] x^{n+1} \underset{n+1=k+m}{\overset{\downarrow}{=}} \Sigma_{k=2}^{\infty}\, \Sigma_{m=2}^{\infty}\, a_k a_m x^{k+m}$$

$$= \left[\Sigma_{k=2}^{\infty}\, a_k x^k \right] \left[\Sigma_{m=2}^{\infty}\, a_m x^m \right] = \{f(x)\}^2.$$

Er geldt dus: $x\cdot\{f(x)-x^2\} = \{f(x)\}^2 \rightarrow \{f(x)\}^2 - xf(x) + x^3 = 0$, zodat

$$f(x) = \tfrac{1}{2}[x \pm x\surd(1-4x)] \underset{\downarrow}{=} \Sigma_{k=1}^{\infty}\, \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!}\, x^{k+1}$$

zie opgave 19

$$= \Sigma_{n=2}^{\infty}\, \frac{(2n-4)!}{(n-1)!(n-2)!} x^n \rightarrow a_n = \frac{(2n-4)!}{(n-1)!(n-2)!} = \frac{1}{n-1} \binom{2n-4}{n-2} .$$

Opgave 21

Beschouw $S = \{1,2,\ldots,15\}$. Hoeveel deelverzamelingen met 4 elementen en zódanig dat er geen opeenvolgende getallen in zitten bevat S ?

a. Toon aan dat het probleem equivalent is met het aantal oplossingen van:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 14 \ ; \ a_1, a_5 \geq 0 \ ; \ a_2, a_3, a_4 \geq 2.$$

b. Toon aan dat dit aantal de coëfficient van x^{14} is in $x^6(1-x)^{-5}$.

c. Bereken deze coëfficient.

Oplossing:

a. Beschouw een viertal $1 \le b_1 < b_2 < b_3 < b_4 \le 15$ met $b_i - b_{i-1} \ge 2$ voor $i = 2,3,4$. Laat $a_1 = b_1 - 1$, $a_2 = b_2 - b_1$, $a_3 = b_3 - b_2$, $a_4 = b_4 - b_3$, $a_5 = 15 - b_4$.
Het is eenvoudig in te zien dat de a_i's aan het stelsel voldoen, en dat iedere oplossing van het stelsel een toelaatbaar viertal oplevert.

b. Neem voor a_1 en a_5 de functie $1 + x + x^2 + \cdots$ en neem voor a_2, a_3 en a_4 de functie $x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$.
Het aantal oplossingen van het stelsel is dan de coëfficiënt van x^{14} in: in $(1 + x + x^2 + \cdots)^2(x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^3 = x^6(1 - x)^{-5}$.

c. $x^6(1 - x)^{-5} = \Sigma_{k=0}^{\infty} \binom{k+4}{4} x^{k+6} \rightarrow$ coëfficiënt $x^{14} = \binom{12}{4} = 495$.

Opgave 22

Zij a_n het aantal partities van n zódanig dat iedere partitie is opgebouwd uit oneven getallen. Zij b_n het aantal partities van n zódanig dat iedere partitie is opgebouwd uit verschillende getallen.

a. Toon aan dat de voortbrengende functie f(x) van a_n voldoet aan

$$f(x) = (1-x)^{-1}(1-x^3)^{-1}(1-x^5)^{-1}\dots \quad .$$

b. Toon aan dat de voortbrengende functie g(x) van b_n voldoet aan

$$g(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots \quad .$$

c. Bewijs dat $a_n = b_n$ voor iedere n.

Oplossing:

a. $a_n = \sum_{d_1+3d_3+5d_5+\cdots=n} 1$. Voor de voortbrengende functie geldt dus:

$$f(x) = (1+x+x^2+ \cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^5+x^{10}+ \cdots)\cdots\cdot =$$

$$\Sigma_{n=0}^{\infty} \{ \sum_{d_1+3d_3+5d_5+\cdots=n} 1 \} x^n = \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

b. $b_n = \sum_{d_1+2d_2+3d_3+\cdots=n;\ d_i = 0 \text{ of } 1} 1$. Voor de voortbrengende functie geldt:

$$g(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots = \Sigma_{n=0}^{\infty} \{ \sum_{d_1+2d_2+3d_3+\cdots=n} 1 \} x^n$$

$$= \Sigma_{n-0}^{\infty} b_n x^n.$$

c. $1 + x^k = \dfrac{1 - x^{2k}}{1 - x^k} \quad \rightarrow \quad g(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 - x} . \dfrac{1 - x^4}{1 - x^2} . \dfrac{1 - x^6}{1 - x^3} . \dfrac{1 - x^8}{1 - x^4} \cdots$

$$= (1 - x)^{-1}(1 - x^3)^{-1}(1 - x^5)^{-1} \cdots = f(x).$$

Hieruit volgt: $a_n = b_n$.

Opgave 23

Toon aan dat $\binom{2n}{n} = \Sigma_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$, door de coëfficienten van x^n in beide leden van de identiteit $(1+x)^n(1+x)^n = (1+x)^{2n}$ gelijk te stellen.

Oplossing:

$\binom{2n}{n}$ is de coëfficiënt van x^n in $(1 + x)^{2n} = \{ (1 + x)^n \}^2.$

$$= \left\{\Sigma_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k\right\} \left\{\Sigma_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} x^j\right\}$$

Deze coëfficiënt is dus: $\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{0}.$

Hieruit volgt: $\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{0} = \Sigma_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$.

Opgave 24

Zij a_n het aantal manieren waarop 4 personen, die elk éénmaal een dobbelsteen werpen, samen n ogen kunnen gooien.

a. Toon aan dat de voortbrengende functie f(x) van de getallen a_n voldoet aan:

$$f(x) = x^4 \cdot \left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4$$

b. Bereken a_{17}.

Oplossing:

a. De i-de persoon kan gooien 1 t/m 6 $\rightarrow$ daarbij hoort de functie

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 = x\,\frac{1 - x^6}{1 - x}.$$

Nu geldt: $x^4 \left(\frac{1 - x^6}{1 - x}\right)^4 = (x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^4$

$$= \Sigma_{n=0}^{\infty} \{ \sum_{\substack{d_1+d_2+d_3+d_4=n \\ 1\le d_i\le 6}} 1 \}x^n = \Sigma_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x).$$

b. $f(x) = x^4(1 - x^6)^4 \Sigma_{k=0}^{\infty} \binom{k+3}{3} x^k$. Hieruit volgt:

$$a_{17} = 1\cdot\binom{16}{3} - 4\cdot\binom{10}{3} + 6\cdot\binom{4}{3} = 560 - 480 + 24 = 104.$$

Opgave 25

Zij a_n het aantal partities van n en b_n het aantal partities van n waarin het getal 1 niet voorkomt.

a. Toon aan dat $b_n = a_n - a_{n-1}$, $n \ge 2$

b. Toon aan dat $a_{n+2} + a_n \ge 2a_{n+1}$, $n \ge 1$.

Oplossing:

a. Voeg aan alle partities van n-1 een 1 toe: dit geeft alle partities van n met minstens één 1: $a_{n-1} = a_n - b_n$, $n \geq 2$.

b. $a_{n+2} + a_n \geq 2a_{n+1}$ d.e.s.d. als $b_{n+2} = a_{n+2} - a_{n+1} \geq a_{n+1} - a_n = b_{n+1}$.
Hoog in iedere partitie van b_{n+1} het hoogste getal met 1 op: dit geeft een deelverzameling van de partities behorend bij b_{n+2}: $b_{n+2} \geq b_{n+1}$.

Paragraaf 9: Het principe van inclusie en exclusie

Opgave 1

Bepaal het aantal natuurlijke getallen uit $\{1,2,...,1000\}$ dat niet deelbaar is door 3, noch door 7, noch door 11.

Oplossing:

$N = \{1, 2, \cdots ,1000\}$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{eigenschap 1: deelbaar door } 3\\ \text{eigenschap 2: deelbaar door } 7\\ \text{eigenschap 3: deelbaar door } 11\end{array}\right\}\quad \begin{array}{lll} N(1) = 333 & N(1,2) = 47 & N(1,2,3) = 4\\ N(2) = 142 & N(1,3) = 30 & \\ N(3) = \underline{\ 90} & N(2,3) = \underline{12} & \\ \quad\quad\ \ 565 & \quad\quad\quad\ \ 89 & \end{array}$$

Het aantal dat noch door 3, noch door 7, noch door 11 deelbaar is, is gelijk aan: $1000 - 565 + 89 - 4 = 520$.

Opgave 2

Hoeveel permutaties van de getallen $1,2,...,8$ zijn er waarin geen van de patronen 12,34,56 en 78 voorkomt?

Oplossing:

$N = \{\text{alle permutaties van } 1, 2, \cdots ,8\}$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{eigenschap 1: bevat } 12\\ \text{eigenschap 2: bevat } 34\\ \text{eigenschap 3: bevat } 56\\ \text{eigenschap 4: bevat } 78\end{array}\right\}\quad \begin{array}{l} N(i) = 7! \text{ voor alle } i.\\ N(i,j) = 6! \text{ voor alle } i,j.\\ N(i,j,k) = 5! \text{ voor alle } i,j,k.\\ N(i,j,k,l) = 4! \text{ voor alle } i,j,k,l.\end{array}$$

Het gevraagde aantal is dus: $8! - \{\binom{4}{1}7! - \binom{4}{2}6! + \binom{4}{3}5! - \binom{4}{4}4!\} = 24.024$

Opgave 3

Beschouw de vergelijking

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18\\ 0 \le x_i \le 7 \text{ en } x_i \text{ geheel }, \ 1 \le i \le 4\end{cases}.$$

a. Bepaal het aantal oplossingen met behulp van voortbrengende functies.

b. Bepaal het aantal oplossingen met het principe van inclusie en exclusie.

Oplossing:

a. Neem voor iedere x_i de functie $1 + x + x^2 + \cdots + x^7$.

Het gevraagde aantal is de coëfficiënt van x^{18} in:

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^7)^4 = \left[\frac{1 - x^8}{1 - x}\right]^4$$
$$= (1 - 4x^8 + 6x^{16} - 4x^{24} + x^{32})\cdot\Sigma_{k=0}^{\infty}\binom{k+3}{3}x^k$$

Deze coëfficiënt is dus: $\binom{21}{3} - 4\binom{13}{3} + 6\binom{5}{3} = 246.$

b. Laat N = {alle oplossingen van $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18; x_i \geq 0$ en geheel}.

Het aantal elementen van N = het aantal manieren om 18 over 4 dozen te verdelen = $f(4,18) = \binom{21}{3}$.

De eigenschap i correspondeert met $x_i \geq 8$ $(1 \leq i \leq 4)$.

$N(i)$ = aantal oplossingen van $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10; x_i \geq 0$ en geheel

$= f(4,10) = \binom{13}{3}$.

$N(i,j)$ = aantal oplossingen van $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2; x_i \geq 0$ en geheel

$= f(4,2) = \binom{5}{3}$.

Het gevraagde aantal is dus: $\binom{21}{3} - \binom{4}{1}\binom{13}{3} + \binom{4}{2}\binom{5}{3} = 246.$

Opgave 4

Laat $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ en $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ met $m \geq n$.

Toon aan dat het aantal functies van A <u>op</u> B gelijk is aan $\Sigma_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^m$.

Oplossing:

Laat N = {alle functies van A naar B}. Dus $\#N = n^m$.

Eigenschap i: b_i is geen beeld $\rightarrow \#N(i_1, i_2, \cdots, i_k) = (n-k)^m$.

Het aantal functies van A <u>op</u> B =

$$n^m - \binom{n}{1}(n-1)^m + \binom{n}{2}(n-2)^m + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}(n-n)^m = \Sigma_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}(n-i)^m.$$

Opgave 5

Bepaal het aantal getallen van $n \geq 3$ cijfers in het 4-tallig stelsel, waarin elk van de cijfers 1,2 en 3 minstens één keer optreedt.

Oplossing:

Laat N = {alle getallen van n cijfers in het viertallig stelsel} $\rightarrow \#N = 4^n$.

Eigenschap i: i komt niet voor, $1 \leq i \leq 3$.

Nu geldt: $N(i) = 3^n$, $N(i,j) = 2^n$ en $N(i,j,k) = 1^n$.

Het gevraagde aantal is : $4^n - \binom{3}{1}3^n + \binom{3}{2}2^n - \binom{3}{3}1^n = 4^n - 3^{n+1} + 3\cdot2^n - 1.$

Opgave 6

Beschouw de volgende uitleenprocedure. Tien boeken worden over tien kinderen verdeeld, zodat elk kind één boek krijgt. Daarna worden de boeken weer ingenomen en opnieuw over de kinderen verdeeld, op zodanige wijze dat elk kind een ander boek krijgt dan de eerste keer. Op hoeveel manieren kan deze procedure uitgevoerd worden?

Oplossing:

Het gevraagde aantal is het aantal dérangementen met $n = 10$.

Dit is volgens formule (9.5): $10!\left\{\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + \frac{1}{10!}\right\}$.

Opgave 7

Op hoeveel manieren kunnen de letters a,a,a,a,b,b,b,c,c worden gerangschikt, zodat gelijke letters niet allemaal achter elkaar staan?

Oplossing:

Er moeten vier a's, drie b's en twee c's worden gekozen. Volgens het multinomium kan dit op $\binom{9}{4,3,2}$ manieren.

Eigenschap 1: aaaa komt voor in de rij $\rightarrow$ $N(1) = \binom{6}{1,\ 3,\ 2}$

Eigenschap 2: bbb komt voor in de rij $\rightarrow$ $N(2) = \binom{7}{4,\ 1,\ 2}$

Eigenschap 3: cc komt voor in de rij $\rightarrow$ $N(3) = \binom{8}{4,\ 3,\ 1}$

Op analoge wijze krijgen we:

$N(1,2) = \binom{4}{1,\ 1,\ 2}$;$N(1,3) = \binom{5}{1,\ 3,\ 1}$;$N(2,3) = \binom{6}{4,\ 1,\ 1}$;$N(1,2,3) = \binom{3}{1,\ 1,1}$.

Het gevraagde aantal is:

$$\frac{9!}{4!\ 3!\ 2!} - \left\{\frac{6!}{1!2!3!} + \frac{7!}{4!1!2!} + \frac{8!}{4!3!1!}\right\} + \left\{\frac{4!}{1!1!2!} + \frac{5!}{1!3!1!} + \frac{6!}{4!1!1!}\right\} - \frac{3!}{1!1!1!}$$

$= 871$.

Opgave 8

5n Personen zijn afkomstig uit n landen, uit elk land komen 5 personen. De 5n personen worden op een rij gezet, zódanig dat iedereen naast een landgenoot staat. Toon aan dat dit kan op

$$(120)^n \left\{2n)! - \binom{n}{1}(2n-1)! + \binom{n}{2}(2n-2)! + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}n!\right\}$$

manieren.

Oplossing:

Merk op dat de personen van ieder land voorkomen in groepjes van 2 of 3 personen . In totaal zijn er dus 2n groepjes die op 2n "plaatsen" staan.

Veronderstel nu dat we de groepjes verdeeld hebben over de plaatsen. Dan kunnen bij iedere verdeling de personen uit één land op 5! manieren worden gerangschikt. omdat er n landen zijn geeft dit dat het aantal verdelingen maal $(5!)^n$ het gevraagde aantal is.

Ga bij het tellen van het aantal verdelingen gaan we als volgt te werk:

Laat N = {alle permutaties van de 2n plaatsen}, dus #N = (2n)!

Kies een van de (2n)! permutaties van de plaatsen 1 t/m 2n. We zetten op ieder van deze plaatsen een groepje van twee of drie. Nu kunnen echter dezelfde rangschikkingen ontstaan.

Bijv. n = 2: personen van land 1 geven we aan met *,*,*,*,* en van land 2 met □,□,□,□,□; (**)(□□)(□□□)(***) is dezelfde rij als (**)(□□□)(□□)(***).

Laat eigenschap i aangeven dat de twee groepjes uit één land in de desbetreffende permutatie achter elkaar voorkomen (zoals in het voorbeeld voor land 2 het geval is). Iedere keer als dit voorkomt geeft dit in feite één plaats minder voor het aantal elementen in de permutatie.

Er zijn nu $\binom{n}{k}$ eigenschappen $i_1, i_2, \ldots, i_k$ en ieder daarvan geeft (2n-k)! permutaties.Dit geldt voor k = 1, 2, ... ,n.

Het principe van inclusie en exclusie geeft aldus voor het totale aantal rangschikkingen:

$$(120)^n \left\{2n)! - \binom{n}{1}(2n-1)! + \binom{n}{2}(2n-2)! + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}n!\right\} .$$

Opgave 9

De Eulerfunctie $\phi(n)$ van het positieve gehele getal n is het aantal gehele getallen k zodat $0 < k \leq n$ en k en n onderling ondeelbaar zijn. Bewijs dat

$$\phi(n) = n \cdot \prod_{p \geq 2} \left(1 - \frac{1}{p}\right) ,$$

waarbij het product wordt genomen over alle delers van n die priemgetallen zijn.

Oplossing:

Stel $n = p_1^{n_1}\, p_2^{n_2} \cdots p_t^{n_t}$. Laat $N = \{1, 2, \ldots , n\}$, dus $\#N = n$.

Eigenschap i is de deelbaarheid door p_i, dus $\#N(i) = \frac{n}{p_i}$

Verder geldt voor $k = 1, 2, \cdots ,t$ dat $\#N(i_1,i_2, \ldots ,i_k) = \frac{n}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_k}}$

Het aantal getallen tussen 1 en n dat relatief priem is t.o.v. n is dus volgens het principe van inclusie en exclusie:

$$n - \left\{\frac{n}{p_1} + \frac{n}{p_2} + \cdots + \frac{n}{p_t}\right\} + \left\{\frac{n}{p_1p_2} + \frac{n}{p_1p_3} + \cdots + \frac{n}{p_{t-1}p_t}\right\} + \cdots +$$

$$\begin{aligned}(-1)^t \frac{n}{p_1p_2\cdots p_t} &= \frac{n}{p_1p_2\cdots p_t}\Big\{p_1p_2\cdots p_t - p_2p_3\cdots p_t - p_1p_3\cdots p_t - p_1p_2\cdots p_t + \\ &\qquad p_3p_4\cdots p_t + p_2p_4\cdots p_t + p_1p_2\cdots p_{t-2} + (-1)^t\Big\} \\ &= \frac{n}{p_1p_2\cdots p_t}\Big\{ (p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_t-1) \Big\} = n \cdot \prod_{p\geq 2} (1-\tfrac{1}{p}).\end{aligned}$$

Opgave 10

Beschouw het aantal permutaties van de getallen 1 t/m n waarin geen enkele i direct gevolgd wordt door i+1, $1 \leq i \leq n-1$.

Toon aan dat dit aantal gelijk is aan $\Sigma_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}(n-k)!(-1)^k$.

Oplossing:

Laat N = {alle permutaties}.

Eigenschap i: het getal i wordt gevolgd door i+1, $1 \leq i \leq n-1$.

Omdat iedere eigenschap één plaats van de permutatie reserveert, geldt:

$N(i_1,i_2,\ldots i_k) = (n - k)!$ en er zijn $\binom{n-1}{k}$ van dergelijke k-tallen.

Volgens het principe van inclusie en exclusie is het gevraagde aantal:

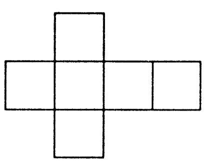
$$n! - \binom{n-1}{1}(n-1)! + \binom{n-1}{2}(n-2)! + \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n-1}{n-1}1! =$$

$$\Sigma_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}(n-k)!(-1)^k .$$

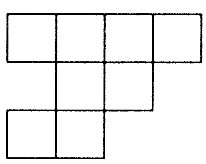
Opgave 11

Bepaal de torenveelterm van de volgende borden:

a.

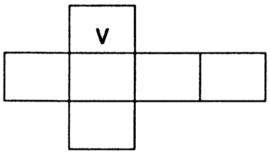


b.



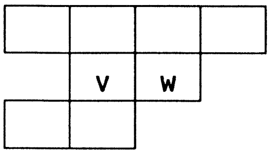
Oplossing:

a.



$$T(x) = x(1 + 3x) + (1 + 5x + 3x^2) = 1 + 6x + 6x^2.$$

b.



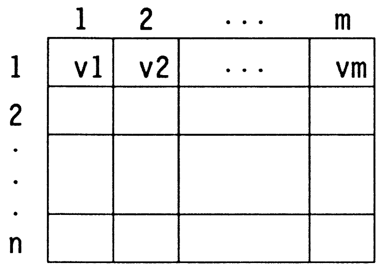
$$T(x) = x(1 + 4x + 2x^2) + x(1 + 5x + 4x^2) + 1 + 6x + 6x^2 = 1 + 8x + 15x^2 + 6x^3.$$

(eerst is v, daarna is w gekozen als speciaal veld).

Opgave 12

Bewijs dat de torenveelterm $R_{n,m}(x)$ van een rechthoekig nxm bord voldoet aan de recurrentie betrekking $R_{n,m}(x) = R_{n-1,m}(x) + mxR_{n-1,m-1}(x)$.

Oplossing:



$$R_{n,m} = xR_{n-1,m-1} + xR_{n-1,m-1} + \cdots + xR_{n-1,m-1} + R_{n-1,m} = mxR_{n-1,m-1} + R_{n-1,m}.$$

(de velden v1, v2, ..., vm zijn achtereenvolgens als speciale velden gekozen).

Opgave 13

Zij $\{L_k(x)\}$ een rij polynomen gedefiniëerd door

$$L_0(x) = 1,\ L_1(x) = 1+x,\ L_k(x) = L_{k-1}(x) + xL_{k-2}(x),\ k \geq 2.$$

Laat $a_{k,m}$ de coëfficient van x^m zijn in $L_k(x)$.

a. Bewijs dat $a_{k,m} = a_{k-1,m} + a_{k-2,m-1}$, $k \geq 2$ $(a_{i,-1} \equiv 0$ voor alle i)

b. Bewijs dat $a_{k,m} = \binom{k-m+1}{m}$, $k \geq 2$.

Oplossing:

a. Vergelijk de coëfficiënten van x^m in het linker en rechterlid van

$L_k(x) = L_{k-1}(x) + xL_{k-2}(x)$: $a_{k,m} = a_{k-1,m} + a_{k-2,m-1}$.

b. Met inductie naar k krijgen we:

$$k=2:\left.\begin{aligned} L_0(x) &= 1 \\ L_1(x) &= 1+x \\ L_2(x) &= 1+2x \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} a_{2,0} &= 1 = \binom{3}{0} \\ a_{2,1} &= 2 = \binom{2}{1} \end{aligned}$$

Algemeen: Stel dat het klopt tot en met k-1.

$$a_{k,m} = a_{k-1,m} + a_{k-2,m-1} = \binom{k-m}{m} + \binom{k-m}{m-1} = \binom{k-m+1}{m},$$

de laatste gelijkheid volgens stelling 7.3 .

Opgave 14

Een huwelijksbureau heeft 5 mannelijke en 5 vrouwelijke cliënten: A,B,C,D,E respectievelijke a,b,c,d,e.

Na onderzoek van deze personen komt men tot de conclusie dat a niet past bij A en B, b niet bij B, c niet bij D, d niet bij C en E en dat e niet past bij C en E.

Op hoeveel verschillende manieren kunnen de vrouwelijke cliënten aan de mannelijke cliënten worden gekoppeld?

Oplossing:

	a	b	c	d	e
A	x				
B	x	x			
C				x	x
D			x		
E				x	x

Er zijn drie niet-interfererende stukken (AB x ab, D x c, CE x de):

$$\begin{aligned} T(x) &= (1+3x+x^2)(1+x)(1+4x+2x^2) \\ &= 1+8x+22x^2+25x^3+12x^4+2x^5 \end{aligned}$$

Het gevraagde aantal is dus:

$5!\cdot 1 - 4!\cdot 8 + 3!\cdot 22 - 2!\cdot 25 + 1!\cdot 12 - 0!\cdot 2 =$

$120 - 192 + 132 - 50 + 12 - 2 = 20.$

Opgave 15

Een taxibedrijf beschikt over 5 taxi's en heeft 5 chauffeurs in dienst.

De eerste chauffeur wil niet rijden in taxi's 1 en 2.

De tweede chauffeur wil niet rijden in de taxi's 3 en 4.

De derde chauffeur wil niet rijden in taxi 5.

De vierde chauffeur wil niet rijden in de taxi's 3 en 5.

De vijfde chauffeur wil niet rijden in taxi 4.

Op hoeveel verschillende manieren kunnen de chauffeurs over de taxi's worden verdeeld terwijl er tevens aan hun eisen wordt voldaan?

Oplossing:

	a	b	c	d	e
A	x	x			
B			x	x	
C					x
D			x		x
E				x	

De chauffeurs geven we met hoofdletters en de taxi's met kleine letters aan.
Beschouw de niet-interfererende delen A x ab en de rest. Pas op de rest eigenschap 2 toe met voor veld v het veld D x e:

$$T(x) = (1 + 2x)\{x(1 + 3x + x^2) + (1 + x)(1 + 4x + 3x^2)$$
$$= (1 + 2x)(1 + 6x + 10x^2 + 4x^3)$$
$$= 1 + 8x + 22x^2 + 24x^3 + 8x^4.$$

Het gevraagde aantal is dus:
$5!\cdot 1 - 4!\cdot 8 + 3!\cdot 22 - 2!\cdot 24 + 1!\cdot 8 = 120 - 192 + 132 - 48 + 8 = 20.$

Opgave 16

Vijf heren (Albert, Bernard, Cees, Dick en Emile) en vijf dames (Fien, Gertie, Hendrike, Ingelise en Josine) hebben ingeschreven voor een tennistoernooi. Dit toernooi is een gemengd-dubbel toernooi, d.w.z. dat iedere heer met één der dames een combinatie vormt. De damens mochten ten hoogste twee heren opgeven met wie ze niet wensten te spelen. Deze wensen zijn als volgt:
Fien wil niet spelen met Albert of Emile, Gertie niet met Cees of Dick, Hendrike niet met Albert of Emile, Ingelise niet met Bernard en Josine niet met Cees.

a. Op hoeveel verschillende manieren kunnen er 5 combinaties worden gevormd, waarbij rekening wordt gehouden met de wensen der dames?
b. Neem aan dat door loting de 5 combinaties worden gevormd. Hierbij heeft ieder van de toegestane mogelijkheden een gelijke kans om geloot te worden. Wat is de kans dat Albert en Josine een combinatie vormen?

Oplossing:

	A	B	C	D	E
F	x				x
G			x	x	
H	x				x
I		x			
J			x		

a. Er zijn drie niet-interfererende stukken (FH x AE, I x B en GJ x CD).Dit zijn dezelfde borden als bij opgave 14. We krijgen dus dat het aantal verschillende toegelaten combinaties 20 is.
b. Als A aan J wordt gekoppeld, dan geldt voor de torenveelterm van de rest van het bord:

$$T(x) = (1 + x)(1 + 4x + 4x^2)$$
$$= 1 + 5x + 8x^2 + 4x^3.$$

Voor de overige 4 koppels zijn er dus
$4!\cdot 1 - 3!\cdot 5 + 2!\cdot 8 - 1!\cdot 4 = 6$ mogelijkheden.
De kans op de combinatie AJ is:6/20 = 0.3.

HOOFDSTUK III: ENUMERATIE

Paragraaf 10: Het tellen van grafen; multinomiaalcoëfficiënten

Opgave 1

Toon het volgende aan: de getallen $d_1, d_2, \ldots, d_n \geq 1$ zijn de graden van de knooppunten van een boom dan en slechts dan als $\Sigma_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$.

Oplossing:

Indien de getallen $d_1, d_2, \ldots, d_n \geq 1$ de graden van de knooppunten van een boom zijn, geldt: $\Sigma_{i=1}^{n} d_i = \Sigma_{i=1}^{n} \delta(v_i) = 2m = 2(n-1)$.

Veronderstel anderzijds dat er getallen $d_1, d_2, \ldots, d_n \geq 1$ zijn zdd.: $\Sigma_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$. Pas stelling 10.11 toe en merk op dat er geen boom met graden $d_1, d_2, \ldots, d_n$ bestaat d.e.s.d als:

$$\begin{bmatrix} n-2 \\ d_1-1, d_2-1, \cdots, d_n-1 \end{bmatrix} = 0 \leftrightarrow \Sigma_{i=1}^{n} (d_i - 1) \neq n-2 \leftrightarrow \Sigma_{i=1}^{n} d_i \neq 2(n-1).$$

Opgave 2

a. Hoeveel verschillende normale grafen met 5 genummerde knooppunten en 4 takken zijn er ?

b. Hoeveel van deze grafen bevatten een kring bestaande uit 3 takken ?

c. Hoeveel van deze grafen bevatten een kring bestaande uit 4 takken ?

d. Hoeveel van deze grafen zijn een boom ?

Oplossing:

a. Het gevraagde aantal = $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}n(n-1) \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} = 210$.

b. Kies drie knooppunten: dit kan op $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = 10$ manieren. Stel dat de knoopppunten 1,2 en 3 zijn gekozen. De graaf kan nu op 7 manieren worden afgemaakt: (2 & 4), (2 & 5), (1 & 4), (1 & 5), (3 & 4), (3 & 5) en (4 & 5). In totaal geeft dit $10 \cdot 7 = 70$ mogelijkheden.

c. Kies vier knooppunten: dit kan op $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = 5$ manieren. Stel dat de knooppunten 1,2,3 en 4 zijn gekozen. Bij zo'n viertal behoren drie kringen, nl. (1,2,3,4,1), (1,2,4,3,1) en (1,3,2,4,1). Dit geeft $5 \cdot 3 = 15$ grafen.

d. Aantal bomen = totaal - aantal dat een kring met 3 of 4 takken bevat
= 210 - 70 - 15 = 125.

Opgave 3

Toon analoog aan voorbeeld 10.17 aan dat er 125 bomen met 5 genummerde knooppunten zijn.

Oplossing:

Omdat $2(n-1) = 2\cdot 4 = 8$, gaat het om het aantal oplossingen van:

$$d_1+d_2+d_3+d_4+d_5 = 8 \text{ met } d_i \geq 1 \text{ voor } 1 \leq i \leq 4.$$

a. één der d_i's is 4 en de andere vier zijn 1:

dit kan op 5 manieren en bij iedere keuze zijn er $\begin{bmatrix} 3 \\ 3,0,0,0,0 \end{bmatrix} = 1$ bomen.

b. één d_i is drie, één is twee en de andere drie zijn 1: dit kan op $5\cdot 4 = 20$ manieren en bij elke keuze zijn er $\begin{bmatrix} 3 \\ 2,1,0,0,0 \end{bmatrix} = 3$ bomen.

c. drie d_i's zijn 2 en twee zijn 1: dit kan op $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = 10$ manieren en bij elke manier zijn er $\begin{bmatrix} 3 \\ 1,1,1,0,0 \end{bmatrix} = 6$ bomen.

In totaal zijn er dus $5\cdot 1+20\cdot 3+10\cdot 6 = 125$ genummerde bomen met vijf knooppunten.

Opgave 4

Bewijs dat het aantal verschillende bomen met knooppunten $v_1,v_2,\ldots,v_n$ en met en met $d_1 = \delta(v_1) = k$ gelijk is aan $\begin{bmatrix} n-2 \\ k-1 \end{bmatrix}(n-1)^{n-1-k}$.

Oplossing:

Volgens stelling 10.11 is dit aantal bomen gelijk aan:

$$\sum_{\substack{d_1,d_2,\ldots,d_n \geq 1; d_1=k \\ d_1+d_2+\cdots+d_n = 2(n-1)}} \begin{bmatrix} n-2 \\ d_1-1,d_2-1,\ldots,d_n-1 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{(k-1)!} \underbrace{\sum_{\substack{d_2,d_3,\ldots,d_n \geq 1 \\ d_2+d_3+\cdots+d_n = 2(n-1)-k}} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ d_2-1,d_3-1,\ldots,d_n-1 \end{bmatrix}}_{\displaystyle \sum_{\substack{m_2,m_3,\ldots,m_n \geq 0 \\ m_2+m_3+\cdots+m_n=n-k-1}} \begin{bmatrix} n-k-1 \\ m_2,m_3,\ldots,m_n \end{bmatrix} = (n-1)^{n-k-1}} \frac{(n-2)!}{(n-k-1)!} =$$

$$\frac{(n-2)!}{(k-1)!(n-k-1)!}(n-1)^{n-k-1} = \begin{bmatrix} n-2 \\ k-1 \end{bmatrix}(n-1)^{n-k-1}.$$

Opgave 5

Bewijs dat $2(n-1)n^{n-2} = \Sigma_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k(n-k)T(k)T(n-k)$, waarbij $T(k)$ het aantal verschillende bomen is met k genummerde knooppunten.

Oplossing:

Kies k knooppunten: dit kan op $\binom{n}{k}$ manieren. Bij elke manier behoort een splitsing $V = V_1 \cup V_2$ met $\#V_1 = k$. Maak nu een boom in V door een knoopppunt van een boom in V_1 te verbinden met een knooppunt van een boom in V_2:er zijn $k(n-k)$ van dergelijke verbindingen.

Omdat k de waarden $1,2,\ldots,n-1$ kan aannemen krijgen we op deze wijze $\Sigma_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k(n-k)T(k)T(n-k)$ bomen.

Op deze wijze wordt iedere boom echter $2(n-1)$ keer geconstrueerd, nl.:

iedere tak (v & w) van de boom kan een verbinding zijn tussen een V_1 en een V_2 met $v \in V_1$ of $v \in V_2$.

Omdat het aantal genummerde bomen n^{n-2} is, geldt:

$$2(n-1)n^{n-2} = \Sigma_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} k(n-k)T(k)T(n-k).$$

Opgave 6

Zij $T(n,p)$ het aantal grafen met genummerde knooppunten $v_1,v_2,\ldots,v_n$ bestaande uit p disjunctie bomen zodat v_i behoort tot de i-de boom, $1 \leq i \leq p$. Toon met behulp van opgave 4 aan dat $T(n,p) = pn^{n-p-1}$.

Oplossing:

Beschouw een bos bestaande uit p bomen. Voeg een extra knooppunt v_0 toe en verbind het met iedere boom: aldus ontstaat een boom met $\delta(v_0) = p$.

Volgens opgave 4 bestaan er $\binom{n-1}{p-1} n^{n-p}$ bomen met $n+1$ knooppunten en met $\delta(v_0) = p$.

Laat $\mathcal{T}$ de verz. van al deze bomen zijn en laat voor $W \subseteq \{1,2,\ldots,n\}$ met $\#W = p$ $\mathcal{T}_W$ de deelverzameling van $\mathcal{T}$ zijn waarin v_0 verbonden is met ieder knooppunt van W.

Omdat er $\binom{n}{p}$ van dergelijke verz. W zijn, geldt:

$$\binom{n-1}{p-1} n^{n-p} = \#\mathcal{T} = \Sigma_W \#\mathcal{T}_W = \binom{n}{p} T(n,p) \quad \rightarrow \quad T(n,p) = \frac{(n-1)!p!(n-p)!}{(p-1)!(n-p)!n!} n^{n-p}$$

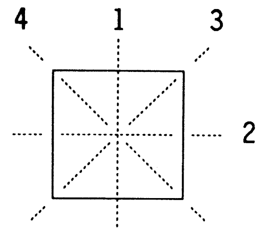
$$= \frac{p}{n} \cdot n^{n-p} = p \cdot n^{n-p-1}.$$

Paragraaf 11: De stelling van Burnside

Opgave 1

Op hoeveel verschillende manieren kunnen de hoekpunten van een vierkant met 3 kleuren worden gekleurd, wanneer het vierkant gedraaid en omgeklapt mag worden?

Oplossing:

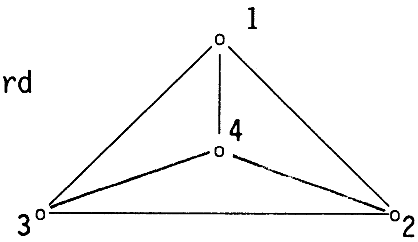


Laat S = {alle kleuringen van de hoekpunten}, dan is $\#S = 3^4$.
Laat π_i = draaien om $90\cdot i^\circ$, $0 \le i \le 3$. Het is eenvoudig in te zien dat: $\psi(\pi_0) = 3^4$, $\psi(\pi_1) = 3$, $\psi(\pi_2) = 3^2$ en $\psi(\pi_3) = 3$.
Laat σ_i = omklappen van het vierkant om as i, $1 \le i \le 4$.
Ook voor deze permutaties is eenvoudig in te zien dat:
$\psi(\sigma_1) = 3^2$, $\psi(\sigma_2) = 3^2$, $\psi(\sigma_3) = 3^3$ en $\psi(\sigma_4) = 3^3$.
Het aantal verschillende kleuringen is dus: $\frac{1}{8}\,[3^4+3+3^2+3+3^2+3^2+3^3+3^3] = 21$.

Opgave 2

Op hoeveel manieren kunnen de knooppunten van nevenstaande graaf met twee kleuren worden gekleurd wanneer de figuur vrij kan bewegen in:

a. twee dimensies.
b. drie dimensies.



Oplossing:

Laat S = {alle kleuringen}, dus $\#S = 2^4$.

a. Laat π_i = draaien om $120\cdot i^\circ$, met als centrum knooppunt 4, $0 \le i \le 2$.
Dan is: $\psi(\pi_0) = 2^4$, $\psi(\pi_1) = 2^2$ en $\psi(\pi_2) = 2^2$, zodat het gevraagde aantal gelijk is aan $\frac{1}{3}\,[2^4 + 2^2 + 2^2] = 8$.

b. Behalve de permutaties uit onderdeel a doen nu ook de permutaties mee welke worden geïnduceerd door de afbeeldingen:
σ_i = spiegelen om de as door de knooppunten i en 4, $1 \le i \le 3$.
We zien dat $\psi(\sigma_i) = 2^3$ voor alle i, zodat het aantal verschillende kleuringen is: $\frac{1}{6}\,[2^4+2^2+2^2+3\cdot 2^3] = 8$.

Opgave 3

Op hoeveel manieren kunnen de velden van een 3 x 3 schaakbord met twee kleuren worden gekleurd, als het schaakbord gedraaid mag worden?

Oplossing:

Laat $S = \{\text{alle kleuringen}\} \rightarrow \#S = 2^9$.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

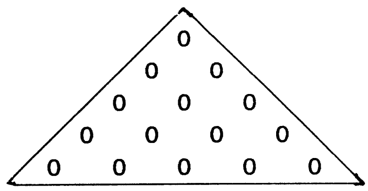
Laat π_i = draaien om $90\cdot i^\circ$,$0 \leq i \leq 3$.

$\psi(\pi_0) = 2^9$, $\psi(\pi_1) = 2^3$ (nl. de velden 1,3,9,7 evenals de velden 2,4,6,8 hebben dezelfde kleur), $\psi(\pi_2) = 2^5$ (nl. 1 en 9, 2 en 8, 3 en 7, 4 en 6 hebben dezelfde kleur), en $\psi(\pi_3) = 2^3$.

Het gevraagde aantal is: $\frac{1}{4}\,[2^9+2^3+2^5+2^3] = 140$.

Opgave 4

Vijftien bollen worden in een gelijkzijdige driehoek gerangschikt zoals hiernaast getekend. De driehoek mag gedraaid worden. Hoeveel rangschikkingen zijn er mogelijk als elke bol rood,wit of blauw wordt gekleurd?



Oplossing:

$S = \{\text{alle kleuringen}\} \rightarrow \#S = 3^{15}$. Laat π_i = draaien om $120\cdot i^\circ$, $0 \leq i \leq 2$.

$\psi(\pi_0) = 3^{15}$, $\psi(\pi_1) = \psi(\pi_2) = 3^5$ (nl. de vijftien punten zijn in vijf groepen van drie te verdelen, bv. de hoekpunten, de binnenste punten, en de knooppunten van één groep moeten dezelfde kleur hebben).

Het totaal aantal is: $\frac{1}{3}\,[3^{15} + 2\cdot 3^5] = 3^{14} + 2\cdot 3^4 = 4.783.131$.

Opgave 5

Beschouw rijtjes van de lengte n bestaande uit blauwe en rode knikkers. Twee rijtjes heten equivalent als de door spiegeling (d.w.z. door van achter naar voren te lopen) uit elkaar ontstaan. Bepaal het aantal verschillende rijtjes.

Oplossing:

$S = \{\text{alle rijtjes}\} \rightarrow \#S = 2^n$.

Laat π_1 = de identieke afbeelding en π_2 = de spiegeling om het midden.

$\psi(\pi_1) = 2^n$ en voor π_2 geldt:

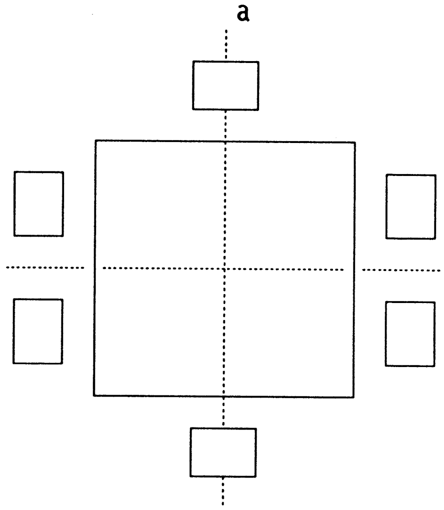
als n even is : $\psi(\pi_2) = 2^{n/2}$ (de eerste helft is willekeurig te kiezen, maar dan ligt de tweede helft vast).

als n oneven is: $\psi(\pi_2) = 2^{(n+1)/2}$ (analoog aan n even, maar nu de middelste plaats ook vrij te kiezen).

Voor het totaal aantal geldt: $\frac{1}{2}[2^n + 2^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}]$.

Opgave 6

Beschouw het aantal manieren waarop 2 studenten en vier stafleden aan de hiernaast getekende vergadertafel kunnen zitten. Van de studenten onderling en van de stafleden onderling nemen we aan dat er geen verschillen zijn en ook noemen we twee opstellingen equivalent als ze in elkaar overgaan via spiegelingen om de in de figuur aangegeven assen a en b. Hoeveel verschillende vergaderopstellingen zijn er?



Oplossing:

S = {alle mogelijke opstellingen}. Een opstelling ligt vast als we aanwijzen waar de twee studenten zitten. deze kunnen op $\binom{6}{2} = 15$ manieren gaan zitten. Dus #S = 15.

Laat π_1 = identiteit, π_2 = spiegelen om as a, π_3 = spiegelen om as b en π_4 = spiegelen om a en b (hiermee is het een groep).

$\psi(\pi_1) = 15$

$\psi(\pi_2) = 3$ (de 2 studenten kunnen zitten op de plaatsen 1 en 6, 2 en 3 of 4 en 5 om invariantie te geven).

$\psi(\pi_3) = 3$ (de 2 studenten kunnen zitten op de plaatsen 1 en 6, 2 en 4 of 3 en 5 om invariantie te geven).

$\psi(\pi_4) = 3$ (de 2 studenten kunnen zitten op de plaatsen 1 en 6, 2 en 5 of 3 en 4 om invariantie te geven).

Het aantal verschillende opstellingen is dus: $\frac{1}{4}$ [15+3+3+3] = 6.

Opgave 7

Veronderstel dat men een getal van 5 cijfers (getallen kleiner dan 10.000 worden aan de voorzijde aangevuld met nullen) op een klein stukje papier wil schrijven. Als het papier onderste boven wordt gehouden worden de getallen 0,1,6,8,9 gelezen als 0,1,9,8,6 respectievelijk.

Getallen die aldus op twee manieren te lezen zijn (bijv. 89166 en 99168) identificeren we.

a. Welke permutatiegroep is in het spel?

b. Hoeveel verschillende getallen zijn er?

Oplossing:

a. Laat π_1 = identiteit en $\pi_2 = \begin{cases} \text{identiteit als in het getal een 2,3,4,5 of 7 voorkomt} \\ \text{omkering als getal bestaat uit 0,1,6,8 en 9.} \end{cases}$

b. $\psi(\pi_1) = 10^5$ en $\psi(\pi_2) = (10^5 - 5^5) + 5^2 \cdot 3$ (nl. er zijn 5^5 getallen met alleen de cijfers 0,1,6,8,9 , dus $10^5 - 5^5$ is het aantal getallen waarvoor π_2 de identiteit is, en van de 5^5 getallen bestaande uit 0,1,6,8,9 zijn de eerste twee plaatsen vrij te kiezen, maar moeten 0,1 of 8 in het midden staan om invariantie te hebben).

Het aantal verschillende getallen = $\frac{1}{2}[10^5 + 10^5 - 5^5 + 5^2 \cdot 3] = 98.475$.

Opgave 8

Beschouw een regelmatige n-hoek die gedraaid en omgeklapt mag worden.

a. Geef aan wat de bijbehorende permutatiegroep is.

b. Stel dat n een priemgetal is. Op hoeveel verschillende manieren kunnen de hoekpunten dan met twee kleuren worden gekleurd?

Oplossing:

a. Allereerst π_i = draaien om $\frac{i}{n} \cdot 360^\circ$, $0 \le i \le n-1$. Vervolgens:

als n is even: σ_i = spiegelen om as door v_i en $v_{i+n/2}$, $1 \le i \le n/2$

τ_i = spiegelen om as door midden van (v_i & v_{i+1}) en ($v_{i+n/2}$ & $v_{i+1+n/2}$), $1 \le i \le n/2$.

als n oneven is: σ_i = spiegelen om as door v_i en midden van ($v_{i+(n-1)/2}$ & $v_{i+1+(n-1)/2}$), $1 \le i \le n$, en de index modulo n nemen.

In beide gevallen in eenvoudig in te zien dat de afbeeldingen een groep vormen met 2n elementen.

b. S = {alle kleuringen van de hoekpunten} $\rightarrow$ $\#S = 2^n$.

$\psi(\pi_0) = 2^n$, $\psi(\pi_i) = 2$, $1 \leq i \leq n-1$ (omdat n priem is voldoen slechts de twee kleuringen waarbij alle knooppunten dezelfde kleur hebben).

$\psi(\sigma_i) = 2 \cdot 2^{(n-1)/2}$ (de eerste twee voor de twee kleuren van knooppunt v_i; de andere n-1 knooppunten zijn in (n-1)/2 paren te verdelen en per paar moet dezelfde kleur worden genomen, maar de kleuring van verschillende paren is onafhankelijk), $1 \leq i \leq n-1$.

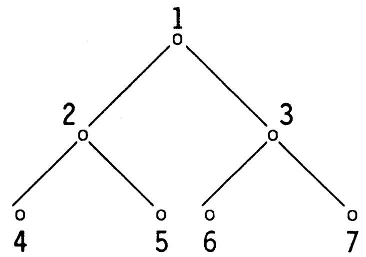
Het gevraagde aantal is dus: $\frac{1}{2n}[2^n + 2(n-1) + n \cdot 2 \cdot 2^{(n-1)/2}]$.

Opgave 9

Beschouw de hiernaast getekende boom, waarvan ieder knooppunt wit of zwart gekleurd kan worden. Twee kleuringen heten equivalent als de een in de ander over te voeren is door verwisseling van linker en rechter deelbomen.

a. Geef aan wat de bijbehorende permutatiegroep is.

b. Bepaal het aantal verschillende kleuringen.



Oplossing:

a. De groep bestaat uit de volgende 8 elementen:

π_1 = identiteit; π_2 = verwissel de knooppunten 4 en 5;

π_3 = verwissel de knooppunten 6 en 7; $\pi_4 = \pi_2\pi_3$;

π_5 = verwissel de knooppunten 2,4,5 en 3,6,7; $\pi_6 = \pi_2\pi_5$; $\pi_7 = \pi_3\pi_5$;

$\pi_8 = \pi_4\pi_5$;

b. $\psi(\pi_1) = 2^7$, $\psi(\pi_2) = 2^6$ (alleen de knooppunten 4 en 5 moeten dezelfde kleur hebben), $\psi(\pi_3) = 2^6$, $\psi(\pi_4) = 2^5$ (4 en 5 hebben één kleur, alsmede 6 en 7), $\psi(\pi_5) = 2^4$ (2 en 3, 4 en 6 en ook 5 en 7 hebben dezelfde kleur), $\psi(\pi_6) = 2^3$ (2 en 3 hebben dezelfde kleur, alsmede 4,5,6 en 7), $\psi(\pi_7) = 2^3$ (analoog aan $\psi(\pi_6)$) en $\psi(\pi_8) = 2^4$ (2 en 3, 4 en 7 en ook 5 en 6 moeten dezelfde kleur hebben).

Het aantal verschillende kleuringen is: $\frac{1}{8}[2^7+2^6+2^6+2^5+2^4+2^3+2^3+2^4] = 42$.

Paragraaf 12: De Theorie van Pólya

Opgave 1

Zij $D = \{a,b,c,d\}$ en $R = \{w,z\}$.Neem x als het gewicht van w en y als het gewicht van z.Zij $G = \{\pi_1,\pi_2\}$ de permutatiegroep van D met

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \text{ en } \pi_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & c & b & d \end{pmatrix}.$$

a. Bepaal de figuurtelreeks;

b. Bepaal de configuratietelreeks;

c. Bepaal de patronentelreeks;

d. Bepaal het aantal niet-equivalente functies van D naar R.

Oplossing:

a. $x + y$.

b. $(x + y)^4$.

c. π_1 heeft 4 cykels van de lengte 1 $\rightarrow$ $b_1 = 4$

π_2 heeft 2 cykels van de lengte 1 en 1 van de lengte 2 $\rightarrow$ $b_1 = 2$, $b_2 = 1$

Dus: $P = \frac{1}{2}\,[(x + y)^4 + (x + y)^2(x^2 + y^2)]$

d. Dit aantal krijgen we door in P $x = y = 1$ te nemen: $\frac{1}{2}\,[2^4 + 2^2\cdot 2\,] = 12$.

Opgave 2

Beschouw een halssnoer met 4 kralen die rood en blauw kunnen zijn.

a. Welke permutatiegroep is in het spel als twee halssnoeren equivalent heten als ze door draaien of omkeren in elkaar kunnen worden gezet?

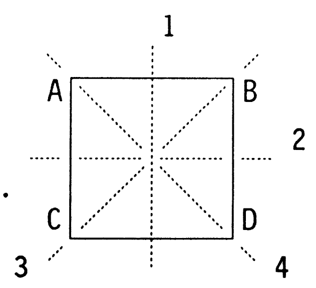
b. Wat is de cykelindex van deze groep?

c. Bepaal het aantal verschillende halssnoeren.

d. Bepaal het aantal verschillende halssnoeren met 2 rode en 2 blauwe kralen.

Oplossing:

a. Laten A, B, C en D de kralen zijn. Het halssnoer is hiernaast schematisch getekend en de toegestane handelingen komen overeen met :



π_i = draaien om het middelpunt over $90\cdot i^\circ, 0 \le i \le 3$.

σ_i = spiegelen om as i, $1 \le i \le 4$.

Het is eenvoudig te verifiëren dat dit de gewenste groep is.

b. π_0 heeft 4 cykels van de lengte 1 $\rightarrow$ x_1^4

π_1 en π_3 hebben 1 cykel van de lengte 4 $\rightarrow$ x_4^1

π_2 heeft 2 cykels van de lengte 2 $\rightarrow$ x_2^2

σ_1 en σ_2 hebben 2 cykels van de lengte 2 $\rightarrow$ x_2^2

σ_3 en σ_4 hebben 2 cykels van de lengte 1 en 1 cykel ven de lengte 2 $\rightarrow x_1^2x_2$

De cykelindex is dus: $\frac{1}{8}$ $[x_1^4 + 2x_4 + 3x_2^2 + 2x_1^2x_2]$.

c. Het aantal verschillende halssnoeren is: $\frac{1}{8}$ $[2^4 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 2\cdot 2^2\cdot 2\ ] = 6$.

d. $P = \dfrac{1}{8}\ [(x + y)^4 + 2(x^4 + y^4) + 3(x^2 + y^2)^2 + 2(x + y)^2(x^2 + y^2)]$

Het aantal verschillende halssnoeren met 2 rode en 2 blauwe kralen =

coëfficiënt van x^2y^2 in $P = \frac{1}{8}\ [\binom{4}{2,2} + 3\binom{2}{1,1} + 2\{\binom{2}{2,0}\binom{1}{0,1}$ +

$\binom{2}{0,2}\binom{1}{1,0}\}] = \frac{1}{8}\ [6 + 3\cdot 2 + 2\cdot(1 + 1)] = 2.$

Opgave 3

Los opgave 1 uit paragraaf 11 op met de theorie van Pólya.

Oplossing:

De cykelindex is dezelfde als in opgave 2. Het gevraagde aantal krijgen we door voor iedere x_i de waarde 3 in te vulleen:

$\frac{1}{8}\ [3^4 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + 2\cdot 3^2\cdot 3\ ] = 21.$

Opgave 4

Los opgave 2b uit paragraaf 11 op met de theorie van Pólya.

Oplossing:

Laat π_i = draaien over $120\cdot i^\circ$, $0 \le i \le 2$, en σ_i = spiegelen om de as door de knooppunten i en 4 (zie de uitwerking van opgave 2b uit paragraaf 11).

Voor de cykelstructuur geldt:

$$\left.\begin{array}{ll} \pi_0 & \rightarrow x_1^4 \\ \pi_1 \text{ en } \pi_2 & \rightarrow x_1x_3 \\ \sigma_1, \sigma_2 \text{ en } \sigma_3 & \rightarrow x_1^2x_2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} C = \frac{1}{6}\ [x_1^4 + 2x_1x_3 + 3x_1^2x_2] \\ \text{aantal kleuringen} = \frac{1}{6}\ [2^4 + 2\cdot 2\cdot 2 + 3\cdot 2^2\cdot 2] = 8. \end{array}$$

Opgave 5

Los opgave 3 uit paragraaf 11 op met de theorie van Pólya.

Oplossing:

Laat G de groep π_i's zijn zoals in de uitwerking van opgave 3 van paragraaf 11. Dan is eenvoudig in te zien dat voor de cykelstructuur geldt:

$$\left.\begin{array}{ll}\pi_0 & \to x_1^9 \\ \pi_1 \text{ en } \pi_3 & \to x_1x_4^2 \\ \pi_2 & \to x_1x_2^4\end{array}\right\} \begin{array}{l} C = \frac{1}{4}\,[x_1^9 + 2x_1x_4^2 + x_1x_2^4\,]\,. \\ \text{Het aantal} = \frac{1}{4}\,[2^9 + 2\cdot 2\cdot 2^2 + 2\cdot 2^4] = 140.\end{array}$$

Opgave 6

Los opgave 4 uit paragraaf 11 op met de theorie van Pólya.

Oplossing:

Neem voor G weer dezelfde groep als in opgave 4 van paragraaf 11. Voor de cykelstructuur geldt:

$$\left.\begin{array}{ll}\pi_0 & \to x_1^{15} \\ \pi_1 \text{ en } \pi_2 & \to x_3^5\end{array}\right\} \begin{array}{l} C = \frac{1}{3}\,[x_1^{15} + 2x_3^5\,]. \\ \text{Het aantal} = \frac{1}{3}\,[3^{15} + 2\cdot 3^5] = 4.783.131\,.\end{array}$$

Opgave 7

Los opgave 5 uit paragraaf 11 voor n oneven op met de theorie van Pólya.

Oplossing:

Neem voor G weer dezelfde groep als in opgave 5 van paragraaf 11. Voor de cykelstructuur geldt:

$$\left.\begin{array}{ll}\pi_1 & \to x_1^n \\ \pi_2 & \to x_1x_2^{(n-1)/2}\end{array}\right\} \begin{array}{l} C = \frac{1}{2}\,[x_1^n + x_1x_2^{(n-1)/2}] \\ \text{Het aantal} = \frac{1}{2}\,[2^n + 2.2^{(n-1)/2}] = 2^{n-1} + 2^{(n-1)/2}.\end{array}$$

Opgave 8

Los opgave 6 uit paragraaf 11 op met de theorie van Pólya.

Oplossing:

Als figuren nemen we de studenten (met gewicht x) en de stafleden (met gewicht y). De groep G is dezelfde als in de uitwerking van opgave 6 van paragraaf 11. Voor de cykelstructuur krijgen we:

$$\left.\begin{array}{ll}\pi_1 & \to x_1^6 \\ \pi_2 & \to x_1^2x_2^2 \\ \pi_3 \text{ en } \pi_4 & \to x_2^3\end{array}\right\} \begin{array}{l} P = \frac{1}{4}\,[(x+y)^6 + (x+y)^2(x^2+y^2)^2 + 2(x^2+y^2)^3] \\ \text{Het gevraagde aantal} = \text{coëfficiënt van } x^2y^4 \text{ in } P = \\ \frac{1}{4}\,\left[\binom{6}{2,4} + \left\{\binom{2}{2,0}\binom{2}{0,2} + \binom{2}{0,2}\binom{2}{1,1}\right\} + 2\binom{3}{1,2}\right] = 6.\end{array}$$

Opgave 9

Beschouw kleuringen van de hoekpunten van een regelmatige zeshoek met twee kleuren. Twee kleuringen zijn equivalent als ze door draaiing van de zeshoek in elkaar overgaan.

a. Welke permutatiegroep is in het spel?

b. Bepaal het aantal verschillende kleuringen.

c. Bepaal het aantal verschillende kleuringen waarin beide kleuren driemaal voorkomen.

Oplossing:

Laat D = {de zes hoekpunten} en R = {x,y}.

a. Laat π_i = draaien met als centrum het middelpunt over $60 \cdot i^\circ$, $0 \le i \le 5$.

b. Het is eenvoudig in te zien dat voor de cykelstructuur geldt:

$$\left.\begin{array}{lll} \pi_0 & \to & x_1^6 \\ \pi_1 \text{ en } \pi_5 & \to & x_6 \\ \pi_2 \text{ en } \pi_4 & \to & x_3^2 \\ \pi_3 & \to & x_2^3 \end{array}\right\}$$

$$C = \frac{1}{6}\,[x_1^6 + 2x_6 + 2x_3^2 + x_2^3\,]\ .$$

Het aantal verschillende kleuringen =

$$\frac{1}{6}\,[2^6 + 2\cdot 2 + 2\cdot 2^2 + 2^3] = 14.$$

c. $P = \frac{1}{6}\,[\ (x+y)^6 + 2(x^6+y^6) + 2(x^3+y^3)^2 + (x^2+y^2)^3\ ]$

Het gevraagde aantal = de coëfficiënt van x^3y^3 in P =

$$\frac{1}{6}\,[\binom{6}{3,3} + 2\binom{2}{1,1}] = 4.$$

Opgave 10

Los opgave 8b uit paragraaf 11 op met de theorie van Pólya.

Oplossing:

Neem voor G weer dezelfde groep als in de uitwerking van opgave 8 van paragraaf 11. Voor de cykelstructuur geldt:

$$\left.\begin{array}{lll} \pi_0 & \to & x_1^n \\ \pi_i,\ 1 \le i \le n-1 & \to & x_n \\ \sigma_i,\ 1 \le i \le n & \to & x_1 x_2^{(n-1)/2} \end{array}\right\}$$

$$C = \frac{1}{2n}\,[x_1^n + (n-1)x_n + nx_1x_2^{(n-1)/2}]$$

Het gevraagde aantal =

$$\frac{1}{2n}\,[2^n + (n-1)\cdot 2 + n\cdot 2\cdot 2^{(n-1)/2}]\ .$$

Opgave 11

Beschouw een regelmatige vijfhoek die vrij in de ruimte kan bewegen en waarvan de hoekpunten met rood, wit en blauw worden gekleurd.

a. Hoeveel verschillende kleuringen zijn er met 2 rode, 1 witte en 2 blauwe hoekpunten ?

b. Hoeveel verschillende kleuringen zijn er met 3 rode hoekpunten ?

Oplossing:

Uit opgave 10 volgt (neem n = 5 en de gewichten x, y en z) dat:

$$P = \frac{1}{10}\left[(x+y+z)^5 + 4(x^5+y^5+z^5) + 5(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)^2\right]$$

a. Het gevraagde aantal = de coëfficiënt van x^2yz^2 in P

$$= \frac{1}{10}\left[\binom{5}{2,1,2} + 5\binom{1}{0,1,0}\binom{2}{1,0,1}\right]$$

$$= \frac{1}{10}\left[30 + 5\cdot 1\cdot 2\right] = 4.$$

b. De rode knooppunten kunnen worden geteld door in P $y = z = 1$ te nemen.

Het aantal kleuringen met 3 rode knooppunten is daarin de coëfficiënt van x^3: $\frac{1}{10}\left[\binom{5}{3}2^2 + 5\binom{1}{1}\binom{2}{1}\cdot 2\right] = 6.$

Opgave 12

Los opgave 9 uit paragraaf 11 op met de theorie van Pólya.

Oplossing:

De groep G is dezelfde als in de uitwerking van opgave 9 uit paragraaf 11.

Voor de cykelstructuur geldt:

$$\left.\begin{array}{lcl}
\pi_1 & \rightarrow & x_1^7 \\
\pi_2 \text{ en } \pi_3 & \rightarrow & x_1^5x_2 \\
\pi_4 & \rightarrow & x_1^3x_2^2 \\
\pi_5 & \rightarrow & x_1x_2^3 \\
\pi_6 \text{ en } \pi_7 & \rightarrow & x_1x_2x_4 \\
\pi_8 & \rightarrow & x_1x_2^3
\end{array}\right\}$$

$$C = \frac{1}{8}\left[x_1^7 + 2x_1^5x_2 + x_1^3x_2^2 + 2x_1x_2^3 + 2x_1x_2x_4\right]$$

Het aantal verschillende kleuringen =

$$\frac{1}{8}\left[2^7 + 2\cdot 2^5\cdot 2 + 2^3\cdot 2^2 + 2\cdot 2\cdot 2^3 + 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\right] = 42.$$

Opgave 13

Beschouw een 2 x 4 schaakbord waarvan de velden met wit en zwart worden gekleurd. We noemen twee borden hetzelfde als ze door draaien over 180° in elkaar over gaan.

a. Bepaal de patronentelreeks.

b. Hoeveel borden zijn er met 6 zwarte en 2 witte velden ?

Oplossing:

Laat G = $\{\pi_1, \pi_2\}$ met π_1 = identiteit en π_2 = draaien over 180°.

a. De cykelstructuur van π_1 is x_1^8 en van π_2 x_2^4, zodat de patronentelreeks wordt: $\frac{1}{2}\,[(x + y)^8 + (x^2 + y^2)^4]$.

b. Het aantal borden met 6 zwarte en 2 witte velden =
de coëfficiënt van x^6y^2 in de patronentelreeks = $\frac{1}{2}[\binom{8}{6,2} + \binom{4}{3,1}] = 16$.

Opgave 14

Beschouw een kubus waarvan de zijvlakken rood en blauw gekleurd kunnen worden. Zij G de permutatiegroep van alle rotaties.

a. Wat is de cykelindex van deze groep?

b. Bepaal het aantal verschillende kleuringen.

c. Bepaal het aantal verschillende kleuringen met 2 rode en 4 blauwe vlakken.

Oplossing:

De permutatiegroep is in voorbeeld 12.13 van het dictaat uitgewerkt:

π_1 is de identieke permutatie met cykelstructuur x_1^6.

π_2, π_3 en π_4 zijn de permutaties uit klasse 2 met cykelstructuur $x_1^2x_2^2$.

π_5 t/m π_{10} zijn de zes permutaties uit klasse 3 met cykelstructuur $x_1^2x_4$.

π_{11} t/m π_{16} zijn de zes permutaties uit klasse 4 met cykelstructuur x_2^3.

π_{17} t/m π_{24} zijn de acht permutaties uit klasse 4 met cykelstructuur x_3^2.

a. $C = \frac{1}{24}\,[x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4 + 6x_2^3 + 8x_3^2]$.

b. Het aantal kleuringen krijgen we door voor iedere x_i 2 in te vullen:
$\frac{1}{24}[2^6 + 3\cdot2^2\cdot2^2 + 6\cdot2^2\cdot2 + 6\cdot2^3 + 8\cdot2^2] = 10$.

c. De patronentelreeks is:
$P = \frac{1}{24}[(x+y)^6 + 3(x+y)^2(x^2+y^2)^2 + 6(x+y)^2(x^4+y^4) + 6(x^2+y^2)^3 + 8(x^3+y^3)^2]$.

Het aantal verschillende kleuringen met 2 rode en 4 blauwe vlakken is de coëfficiënt van x^2y^4 in P:

$\frac{1}{24}[\binom{6}{2,4} + 3\{\binom{2}{2,0}\binom{2}{0,2} + \binom{2}{0,2}\binom{2}{1,1}\} + 6\binom{2}{2,0}\binom{1}{0,1} + 6\binom{3}{1,2}] =$

$\frac{1}{24}[15 + 3(1 + 2) + 6\cdot1 + 6\cdot3] = 2$.

Opgave 15

De 6 zijvlakken van een kubus worden met 4 kleuren A,B,C en D gekleurd.

Zij G de permutatiegroep van alle draaiingen.

Op hoeveel verschillende manieren kan de kubus gekleurd worden z.d.d. 2 vlakken kleur A, 2 vlakken kleur B, 1 vlak kleur C en 1 vlak kleur D heeft?

Oplossing:

Uit opgave 14 volgt dat voor dit probleem de patronentelreeks is:

$$P = \frac{1}{24}[(A+B+C+D)^6+3(A+B+C+D)^2(A^2+B^2+C^2+D^2)^2 + 6(A+B+C+D)^2(A^4+B^4) + 6(A^2+B^2+C^2+D^2)^3 + 8(A^3+B^3+C^3+D^3)^2].$$

Het gevraagde aantal is de coëfficiënt van A^2B^2CD in P:

$$\frac{1}{24}\left[\binom{6}{2,2,1,1} + 3\binom{2}{0,0,1,1}\binom{2}{1,1,0,0}\right] = \frac{1}{24}[180 + 12] = 8.$$

Opgave 16

Beschouw kleuringen van de zijvlakken van een kubus met k kleuren ($k\leq 6$).

Zij G de permutatiegroep van alle rotaties van de kubus.

a. Wat is de cykelindex van deze groep ?

b. Bepaal de patronen-telreeks.

c. Bereken het aantal verschillende kleuringen waarin alle 6 kleuren voorkomen.

Oplossing:

a. In opgave 14 hebben we afgeleid dat de cykelindex C voldoet aan:

$$C = \frac{1}{24}[x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4 + 6x_2^3 + 8x_3^2].$$

b. Laat w_i het gewicht van kleur i zijn, $i = 1,2,\dots,k$.

Uit opgave 14 volgt eveneens de patronentelreeks:

$$P = \frac{1}{24}[(w_1 + w_2 + \cdots + w_k)^6 + 3(w_1 + w_2 + \cdots + w_k)^2(w_1^2 + w_2^2 + \cdots + w_k^2) + 6(w_1 + w_2 + \cdots + w_k)^2(w_1^4 + w_2^4 + \cdots + w_k^4) + 6(w_1^2 + w_2^2 + \cdots + w_k^2)^3 + 8(w_1^3 + w_2^3 + \cdots + w_k^3)^2].$$

c. Het aaantal kleuringen waarin alle 6 kleuren een keer voorkomen is de coëfficiënt van $w_1w_2 \cdots w_6$ in P: $\frac{1}{24}\left[\binom{6}{1,1,1,1,1,1}\right] = 30.$

Opgave 17

Beschouw kleuringen van de hoekpunten van een tetrahedron (regelmatig viervlak) met de kleuren rood, wit en blauw.

Twee kleuringen heten equivalent als ze door draaiing van het tetrahedron in elkaar overgaan.

a. Wat is de patronen-telreeks?

b. Bepaal het aantal verschillende kleuringen.

c. Bepaal het aantal verschillende kleuringen met 1 rode, 2 witte en 1 blauwe kleur.

Oplossing:

a. In voorbeeld 12.15 van het dictaat is afgeleid dat de cykelindex C gelijk is aan: $\frac{1}{12}[x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2]$. Voor de patronen-telreeks geldt dus:
$P = \frac{1}{12}[(x+y+z)^4 + 8(x+y+z)(x^3+y^3+z^3) + 3(x^2+y^2+z^2)^2$.

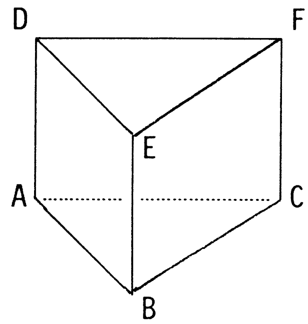
b. Het aantal verschillende kleuringen krijgen we door $x = y = z = 1$ te nemen:
$\frac{1}{12}[3^4 + 8\cdot 3\cdot 3 + 3\cdot 3^2] = 15$.

c. Dit aantal is de coëfficiënt van xy^2z in P: $\frac{1}{12}\binom{4}{1,2,1} = 1$.

Opgave 18

Beschouw kleuringen van de hoekpunten van het hiernaast getekende rechte prisma ABCDEF (driehoek ABC is gelijkzijdig) met drie verschillende kleuren.

Kleuringen zijn equivalent als ze door een draaiing in drie dimensies in elkaar kunnen overgaan.



a. Bepaal de permutatiegroep G van de draaiingen.

b. Bepaal de cykelindex van G en de patronentelreeks.

c. Hoeveel verschillende kleuringen zijn er waarin iedere kleur precies twee keer voorkomt?

Oplossing:

a. $G = \{\pi_1, \pi_2, \ldots , \pi_6\}$ met:
π_1 = identiteit; $\pi_2 = 120^\circ$ draaien om de as door de middens van het boven- en ondervlak; $\pi_3 = 240^\circ$ draaien om de as door de middens van het boven- en ondervlak; π_4, π_5 en π_6 zijn draaiingen om 180° rond de assen door een opstaande ribbe en het midden der overstaande zijde.

b. Voor de cykelstructuur geldt:

$$\left.\begin{array}{ll} \pi_1 & \rightarrow x_1^6 \\ \pi_2, \pi_3 & \rightarrow x_3^2 \\ \pi_4, \pi_5, \pi_5 & \rightarrow x_2^3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} C = \frac{1}{6}\,[x_1^6 + 2x_3^2 + 3x_2^3] \\ P = \frac{1}{6}\,[(x + y + z)^6 + 2(x^3 + y^3 + z^3)^2 + 3(x^2 + y^2 + z^2)^3] \end{array}$$

c. Dit aantal is de coëfficiënt van $x^2y^2z^2$ in P:

$$\frac{1}{6}\left[\binom{6}{2,2,2} + 3\binom{3}{1,1,1}\right] = \frac{1}{6}\,[90 + 18] = 18.$$

Opgave 19

Beschouw een regelmatige 8-hoek, waarvan de hoekpunten met 3 kleuren worden gekleurd.

Hoeveel verschillende kleuringen zijn er mogelijk als de 8-hoek in twee dimensies gedraaid mag worden?

Oplossing:

Zij $G = \{\pi_i\ ,\ i = 0,1,\ldots,7\}$ met π_i de draaiing over $45\cdot i^\circ$ met als centrum het middelpunt van de 8-hoek. Het is eenvoudig in te zien dat voor de cykelstructuur geldt:

$$\left.\begin{array}{ll} \pi_0 & \rightarrow x_1^8 \\ \pi_1, \pi_3, \pi_5 \text{ en } \pi_7 & \rightarrow x_8 \\ \pi_2 \text{ en } \pi_6 & \rightarrow x_4^2 \\ \pi_4 & \rightarrow x_2^4 \end{array}\right\}$$

$$C = \frac{1}{8}\,[x_1^8 + 4x_8 + 2x_4^2 + x_2^4\ ]$$

Dus het aantal verschillende kleuringen =

$$\frac{1}{8}\,[3^8 + 4\cdot 3 + 2\cdot 3^2 + 3^4] = 834\ .$$

Opgave 20

Laat G een cyclische permutatiegroep van een verz. S zijn: $G = \{\pi^i,\ 1 \le i \le n\}$.

a. Toon aan dat het aantal equivalentieklassen waarin S wordt verdeeld door de equivalentierelatie, geïnduceerd door G, gelijk is aan

$$\frac{1}{n} \sum_{d|n} \psi(\pi^d)\ \phi(\tfrac{n}{d}),$$

waarbij ϕ de Eulerfunctie is (zie opgave 9 paragraaf 9).

b. Pas de formule uit a toe om opgave 19 op te lossen.

Oplossing:

a. Volgens de stelling van Burnside is het aantal equivalentieklassen gelijk aan $\frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^{n}\psi(\pi^i)$, met $\psi(\pi^i)$ = het aantal elementen van S dat invariant is onder π^i.

Stel i is zdd. g.g.d.(i,n) = d, dan genereren π^i en π^d dezelfde ondergroep, zodat $\psi(\pi^i) = \psi(\pi^d)$.

Het aantal i's, zdd. g.g.d.(i,n) = d is gelijk aan het aantal i's zdd. g.g.d. $\left(\frac{i}{d},\frac{n}{d}\right) = 1$, d.w.z. de Eulerfunctie $\phi\left(\frac{n}{d}\right)$.

Hieruit volgt dat het aantal klassen $= \frac{1}{n} \sum_{d|n} \psi(\pi^d)\ \phi(\frac{n}{d})$.

b. Zij S = {alle 3-kleuringen}.

$n = 8 \rightarrow d_1 = 1,\ d_2 = 2,\ d_3 = 4$ en $d_4 = 8$.

$\phi(8) = 4,\ \phi(4) = 2,\ \phi(2) = 1$ en $\phi(1) = 1$.

$\psi(\pi^1) = 3,\ \psi(\pi^2) = 3^2,\ \psi(\pi^4) = 3^4$ en $\psi(\pi^8) = 3^8$.

Het aantal kleuringen is volgens onderdeel a:

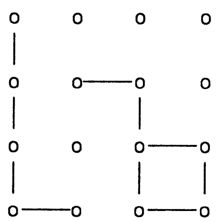
$\frac{1}{8}\ [\psi(\pi^1)\phi(8) + \psi(\pi^2)\phi(4) + \psi(\pi^4)\phi(2) + \psi(\pi^8)\phi(1)\ ] =$

$\frac{1}{8}\ [3\cdot 4 + 9\cdot 2 + 81\cdot 1 + 6561\cdot 1] = 834$.

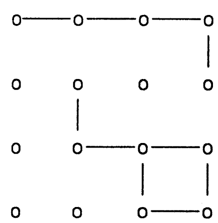
Opgave 21

Een producent van geïntegreerde schakelingen bouwt chips met 16 elementen die, zoals hiernaast is getekend, in een 4 x 4 matrix zijn gerangschikt. Teneinde verschillende circuits te maken heeft hij verschillende patronen nodig voor de verbinding der elementen. Neem aan dat slechts horizontale en verticale verbindingen mogelijk zijn tussen buurelementen, zoals

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16



of

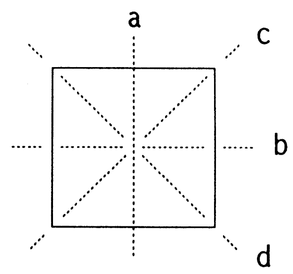


Om verbindingen op een chip aan te brengen is een foto-masker nodig van het verbindingspatroon. Hetzelfde foto-masker is bruikbaar voor beide aangegeven patronen (spiegel om een diagonaal). Hoeveel maskers zijn nodig om alle mogelijke patronen te realiseren?

Oplossing:

Laat D = {alle mogelijke 24 verbindingen}.

Laat G = $\{\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_8\}$ met



π_1 de identiteit met cykelstructuur x_1^{24}

π_2 draaien over 90^0 met cykelstructuur x_4^6

π_3 draaien over 180^0 met cykelstructuur x_2^{12}

π_4 draaien over 270^0 met cykelstructuur x_4^6

π_5, π_6 spiegelen om as a resp. as b met cykelstructuur $x_1^4 x_2^{10}$

π_7, π_8 spiegelen om as c resp. as d met cykelstructuur x_2^{12}

Dus de cykelindex is: $C = \frac{1}{8}\,[x_1^{24} + 2x_4^6 + 3x_2^{12} + 2x_1^4 x_2^{10}]$.

Het aantal benodigde maskers is: $\frac{1}{8}\,[2^{24} + 2 \cdot 2^6 + 3 \cdot 2^{12} + 2 \cdot 2^4 \cdot 2^{10}] =$

$2^{21} + 2^4 + 3 \cdot 2^9 + 2^{12} = 2.102.800$.

Opgave 22

De hoekpunten van een vierkant worden met 3 kleuren gekleurd. Twee kleuringen heten equivalent als ze in elkaar overgaan door het vierkant in twee dimensies te draaien en/of door de kleuren te permuteren.

Bepaal het aantal equivalentieklassen van de kleuringen.

Oplossing:

Beschouw allereerst de draaiingen:

π_1 de identiteit met cykelstructuur x_1^4

π_2 draaien over 90^0 met cykelstructuur x_4

π_3 draaien over 180^0 met cykelstructuur x_2^2

π_4 draaien over 270^0 met cykelstructuur x_4

De patronen-telreeks is:

$$\frac{1}{4}\,[(x+y+z)^4 + 2(x^4+y^4+z^4) + (x^2+y^2+z^2)]$$

Omdat we de kleuren mogen permuteren zijn we slechts geïnteresserd in de coëfficiënten van x^4, x^3y, x^2y^2 en x^2yz (neem aan dat x het gewicht is van de kleur die het meest en z het gewicht van de kleur die het minst voorkomt; bijv. x^4, y^4 en z^4 zijn equivalent en we nemen x^4).

De coëfficiënt van x^4 is $\frac{1}{4}[\binom{4}{4,0,0} + 2\binom{1}{1,0,0} + \binom{2}{2,0,0}] = 1$.

De coëfficiënt van x^3y is $\frac{1}{4}[\binom{4}{3,1,0}] = 1$.

De coëfficiënt van x^2y^2 is $\frac{1}{4}[\binom{4}{2,2,0} + \binom{2}{1,1,0}] = 2$.

De coëfficiënt van x^2yz is $\frac{1}{4}[\binom{4}{2,1,1}] = 3$.

Het aantal equivalentieklassen is dus 1 + 1 + 2 + 3 = 7.

Opgave 23

Laat D de verz. zijn van de 2^n binaire getallen bestaande uit n bits.
Aan ieder element $i_1 i_2 \dots i_n$ van D voegen we een permutatie $\pi_{i_1 i_2 \dots i_n}$ op D toe gedefinieerd door:

$$\pi_{i_1 i_2 \dots i_n}(j_1, j_2, \dots, j_n) = k_1 k_2 \dots k_n \text{ met } k_m = \begin{cases} j_m & \text{als } i_m = 0 \\ 1 - j_m & \text{als } i_m = 1 \end{cases}$$

a. Toon aan dat deze permutaties een groep vormen.

b. Toon aan dat de cykelindex $\frac{1}{2^n}\left\{x_1^{2^n} + (2^n - 1)x_2^{2^{n-1}}\right\}$ is .

c. Zij R = {0,1}. Bepaal het aantal verschillende (m.b.t. de permutatie groep) functies van D naar R.

Oplossing:

a. $\pi_{00\dots0}$ is de identieke afbeelding en voor iedere $\pi_{i_1 i_2 \dots i_n}$ is er een inverse, nl. $\pi_{i_1 i_2 \dots i_n}$ zelf. Het is eenvoudig na te gaan dat het product van twee permutaties weer een permutatie is en dat de rekenregels kloppen.

b. $\pi_{00\dots0}$ heeft cykelstructuur $x_1^{2^n}$.
Omdat $\pi_{i_1 i_2 \dots i_n}$ de inverse vanzichzelf is geeft dit 2^{n-1} cykels ter lengte 2. Dus de cykelindex is: $C = \frac{1}{2^n}[x_1^{2^n} + (2^n-1)x_2^{2^{n-1}}]$.

c. Het aantal verschillende functies krijgen we door voor x_i 2 in te vullen:

$$\frac{1}{2^n}[2^{2^n} + (2^n-1)2^{2^{n-1}}] = \frac{2^{2^n-1}}{2^n}[2 + (2^n-1)] = 2^{2^n-n-1}[2^n + 1].$$

Paragraaf 13: Het tellen van niet-isomorfe grafen

Opgave 1

Hoeveel verschillende grafen zijn er met 4 knooppunten als tussen ieder tweetal knooppunten hoogstens twee takken zijn toegestaan?

Oplossing:

De cykelindex voor dit probleem staat in het dictaat:

$$C = \frac{1}{24}(x_1^6 + 9x_1^2x_2^2 + 8x_3^2 + 6x_2x_4).$$

Neem nu de volgende gewichten: x voor geen tak, y voor één tak en z voor twee takken. De patronen-telreeks is:

$$P = \frac{1}{24}[(x+y+z)^6 + 9(x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2)^2 + 8(x^3+y^3+z^3)^2 + 6(x^2+y^2+z^2)(x^4+y^4+z^4)].$$

Hieruit volgt voor het totale aantal: $\frac{1}{24}[3^6 + 9\cdot 3^2\cdot 3^2 + 8\cdot 3^2 + 6\cdot 3\cdot 3] = 66.$

Opgave 2

Onderzoek de niet-isomorfe normale gerichte grafen met 3 knooppunten als volgt:

a. Beschouw de symmetrische groep S_3 en bepaal de door S_3 geinduceerde permutatiegroep van de geordende tweetallen uit $\{1,2,3\}$.

b. Bepaal de cykelindex van deze groep.

c. Hoeveel niet-isomorfe normale gerichte grafen met 3 knooppunten zijn er?

d. Bepaal de patronentelreeks.

e. Hoeveel niet-isomorfe normale gerichte grafen met 3 knooppunten en 4 pijlen zijn er? Teken deze grafen.

Oplossing:

a. Neem als objecten alle zes geordende 2-tallen.

Laat $S_3 = \{\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix}\}$. Deze groep induceert op een natuurlijke wijze een permutatiegroep op de geordende tweetallen uit $\{1,2,3\}$.

b. Voor de cykelstructuur krijgen we:

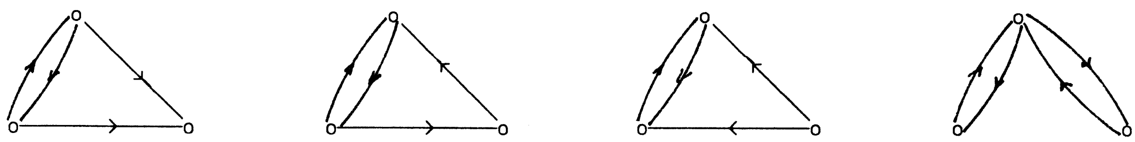
$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \text{ heeft } x_1^6 \\ \pi_2, \pi_3 \text{ en } \pi_4 \text{ hebben } x_2^3 \\ \pi_5 \text{ en } \pi_6 \text{ hebben } x_3^2 \end{array}\right\} \quad C = \frac{1}{6}[x_1^6 + 3x_2^3 + 2x_3^2].$$

c. Dit aantal krijgen we door voor x_i de waarde 2 in te vullen:

$\frac{1}{6}[2^6 + 3\cdot 2^3 + 2\cdot 2^2] = 16.$

d. $P = \frac{1}{6}[(x+y)^6 + 3(x^2+y^2)^3 + 2(x^3+y^3)].$

e. Dit is de coëfficiënt van x^4y^2 in P: $\frac{1}{6}[\binom{6}{4,2} + 3\cdot\binom{3}{2,1}] = 4.$



Opgave 3

Bewijs dat de cykelindex van de tweetallengroep R_4 gelijk is aan

$$\frac{1}{24}(x_1^6 + 9x_1^2x_2^2 + 8x_3^2 + 6x_2x_4).$$

Oplossing:

Neem als objecten de zes $\binom{4}{2}$ 2-tallen. Laat G de permutatie groep zijn van de knooppunten 1 t/m 4. Dan induceert G een permutatiegroep op de tweetallen: R_4. Deze groep bestaat uit:

π_1 de identiteit met cykelstructuur x_1^6.

π_2 t/m π_7 de permutaties geïnduceerd door de zes permutaties van G, waarbij 2 elementen op hun plaats blijven en de andere tweeverwisselen; de cykelstructuur is $x_1^2x_2^2$.

π_8, π_9 en π_{10} de drie permutaties afkomstig van de permutaties waarin twee paren verwisseld worden: cykelstructuur eveneens $x_1^2x_2^2$.

π_{11} t/m π_{18} afkomstig van de 8 permutaties van G waarin precies één element op zijn plaats blijft: de cykelstructuur is x_3^2.

π_{19} t/m π_{24} de 6 permutaties waarbij geen enkel element op zijn plaats blijft; hiervan is de cykelstructuur x_4x_2.

Hiermee wordt de cykelindex $C = \frac{1}{24}(x_1^6 + 9x_1^2x_2^2 + 8x_3^2 + 6x_2x_4)$.

HOOFDSTUK IV: LINEAIRE PROGRAMMERING EN KORTSTE PADEN IN NETWERKEN

Paragraaf 14: Lineaire programmering

Opgave 1

Een veevoederfabrikant moet een product samenstellen met onderstaande ingrediënten en zodanig dat aan de vermelde specificaties wordt voldaan.

Ingredient	Specificatie
Appelschillen	minstens 13%
Vitamines	minstens 2% en hoogstens 3%
Suiker	minstens 8%
Eiwitten	hoogstens 4%
Haver	het overblijvende deel

De fabrikant beschikt over 5 mengsels waarvan de samenstelling en de kosten als volgt zijn:

mengsel	appelschillen	vitamines	suiker	eiwitten	haver	kosten per kg
1	60%	5%	30%	5%	--	18
2	80%	10%	--	10%	--	15
3	--	20%	70%	10%	--	10
4	100%	--	--	--	--	20
5	--	--	--	--	100%	5

Het doel van de fabrikant is om uit deze 5 mengsels zo goedkoop mogelijk en produkt te fabriceren dat aan de specificaties voldoet.
Formuleer dit als een lineair programmeringsprobleem.

Oplossing:

Laat x_i = de fractie van mengsel i van de totale productie, $1 \leq i \leq 5$.
Het probleem van de fabrikant is dan het volgende LP-probleem:

minimaliseer : $18\, x_1 + 15\, x_2 + 10\, x_3 + 20\, x_4 + 5\, x_5$

onder de voorwaarden:

$$\frac{60}{100} x_1 + \frac{80}{100} x_2 + \frac{100}{100} x_4 \geq \frac{13}{100}$$

$$\frac{3}{100} \geq \frac{5}{100} x_1 + \frac{10}{100} x_2 + \frac{20}{100} x_3 \geq \frac{2}{100}$$

$$\frac{30}{100} x_1 + \frac{70}{100} x_3 \geq \frac{8}{100}$$

$$\frac{5}{100} x_1 + \frac{10}{100} x_2 + \frac{10}{100} x_3 \leq \frac{4}{100}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \text{ en } x_5 \geq 0$$

Opgave 2

Een bedrijf dat meubelplaten produceert heeft in 2 plaatsen fabrieken staan. In de eerste fabriek, waar op 80% van de maximale capaciteit wordt gedraaid, wordt per maand 2800 ton geproduceerd, met kosten *f* 500,- per ton. Voor 100 ton meubelplaat is 80 ton grondstof nodig. Tot 1500 ton kan deze in de buurt worden ingekocht voor *f* 100,- per ton, het restant wordt elders gekocht voor *f* 150,- per ton.

In de tweede fabriek wordt op 60% van de maximale capaciteit gewerkt met een produktie van 3600 ton per maand. De produktiekosten zijn hier *f* 600,- per ton. Per maand kan 4000 ton grondstof voor *f* 125,- per ton worden gekocht, en voor het meerdere moet *f* 150,- worden betaald. Per maand moet het bedrijf 6300 ton produceren. Formuleer het probleem "hoeveel moet in iedere fabriek geproduceerd worden om de totale kosten te minimaliseren" als een lineair programmeringsprobleem.

Oplossing:

Laat: x_i = de hoeveelheid die in fabriek i wordt geproduceerd, $i = 1,2$;

y_i = de hoeveelheid grondstof voor fabriek i, die in de buurt wordt gekocht, $i = 1,2$;

z_i = de hoeveelheid grondstof voor fabriek i , die elders wordt gekocht, $i = 1,2$;

De productiebeperkingen zijn: $x_1 \leq 3500$; $x_2 \leq 6000$; $x_1 + x_2 = 6300$.

De grondstofbeperkingen zijn: $y_1 \leq 1500$; $y_2 \leq 4000$; $y_1 + z_1 = 0.8x_1$;

$y_2 + z_2 = 0.8x_1$.

De kosten zijn: $500x_1 + 600x_2 + 100y_1 + 150z_1 + 125y_2 + 150z_2$.

Het LP-probleem is:

minimaliseer

onder de voorwaarden: $500x_1 + 600x_2 + 100y_1 + 150z_1 + 125y_2 + 150z_2$

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
x_1 & & & & & & \leq 3500 \\
 & x_2 & & & & & \leq 6000 \\
x_1 + & x_2 & & & & & = 6300 \\
-0.8x_1 & & + \; y_1 + & z_1 & & & = 0 \\
 & -0.8x_2 & & & y_2 + & z_2 & = 0 \\
 & & y_1 & & & & \leq 1500 \\
 & & & & y_2 & & \leq 4000 \\
\end{array}
$$

$$x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ z_1 \text{ en } z_2 \geq 0$$

Opgave 3

Een gokker kan op 4 manieren geld inzetten. Hij heeft ƒ500,-. Het spel heeft 3 mogelijke uitkomsten, en de volgende tabel geeft per ingezette gulden de winst of het verlies voor ieder van de mogelijkheden.

	keuze van de inzet			
uitkomst spel	1	2	3	4
1	-3	4	-7	15
2	5	-3	9	4
3	3	-9	10	8

De speler wil zijn ƒ 500,- zó verdelen over de vier mogelijkheden dat het bedrag dat hij minstens "ontvangt" (dit kan ook negatief zijn) maximaal is. Formuleer dit probleem als LP-probleem.

Oplossing:

Zij x_i = de hoeveelheid geld die wordt ingezet op manier i, $1 \le i \le 4$.
Als de uitkomst 1 is, dan ontvangt hij: $-3x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 15x_4$.
Als de uitkomst 2 is, dan ontvangt hij: $5x_1 - 3x_2 + 9x_3 + 4x_4$.
Als de uitkomst 3 is, dan ontvangt hij: $3x_1 - 9x_2 + 10x_3 + 8x_4$.
Zijn totale hoeveelheid geld is ƒ 500 : $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 500$.
Laat z het bedrag zijn dat hij minstens ontvangt, dan geldt voor z:
$z = \min_i$ (uitkomst i), d.w.z. $z \le$ uitkomst i $(1 \le i \le 3)$ en z maximaal.
Het corresponderende LP-probleem luidt:

maximaliseer z

onder de voorwaarden:
$$\begin{aligned}
-3x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 15x_4 - z &\ge 0\\
5x_1 - 3x_2 + 9x_3 + 4x_4 - z &\ge 0\\
3x_1 - 9x_2 + 10x_3 + 8x_4 - z &\ge 0\\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 500\\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0
\end{aligned}$$

Opgave 4

Schrijf het volgende probleem in de standaardgedaante (14.9):

$$\min \left\{ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \;\middle|\; \begin{array}{lll} x_1 + x_2 - x_3 \ge -5 & ; & x_1 \ge 0 \\ -6x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 15 & ; & x_2 \ge 0 \\ 19x_1 - 7x_2 + 5x_3 \le 13 & ; & x_3 \text{ vrij} \end{array} \right\}$$

Oplossing:

Het minimaliseren van f(x) kan worden vervangen door: - max {-f(x) }.
Een vrije variabele kan worden vervangen door het verschil van twee niet-negatieve variabelen. Een gelijkheid kan worden vervangen door twee ongelijkheden. Aldus krijgen we:

$$-\max\left\{ -2x_1 - 3x_2 - 5x_3^+ + 5x_3^- \;\middle|\; \begin{array}{rcl} -x_1 - x_2 + x_3^+ - x_3^- & \le & 5 \\ -6x_1 + 7x_2 - 9x_3^+ + 9x_3^- & \le & 15 \\ 6x_1 - 7x_2 + 9x_3^+ - 9x_3^- & \le & -15 \\ 19x_1 - 7x_2 + 5x_3^+ - 5x_3^- & \le & 13 \\ x_1,\ x_2,\ x_3^+,\ x_3^- & \ge & 0 \end{array} \right\}$$

Opgave 5

Bewijs dat de verzameling van optimale oplossing van een lineair programmeringsprobleem convex is.

Oplossing:

Veronderstel dat x^1 en x^2 optimale oplossingen zijn met waarde x_0 van de doelfunctie. Laat $0 < \lambda < 1$ en beschouw $x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$.
Omdat het toegelaten gebied convex is ,is x eveneens toelaatbaar. Voor de waarde van de doelfunctie geldt:

$$p^T x = \lambda p^T x^1 + (1-\lambda)p^T x^2 = \lambda x_0 + (1-\lambda)x_0 = x_0,$$

d.w.z. x is eveneens optimaal.

Opgave 6

a. Stel het duale probleem op van

$$\max\left\{ x_1 + x_2 + x_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 6 \;;\; x_1 \ge 0 \\ x_1 \qquad\quad + x_3 \le 4 \;;\; x_2 \ge 0 \\ \qquad x_2 - x_3 \le 1 \;;\; x_3 \ge 0 \end{array} \right\}$$

b. Stel het duale probleem op van:

$$\max\left\{ x_1 + x_2 + x_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 6 \;;\; x_1 \ge 0 \\ x_1 \qquad\quad + x_3 \le 4 \;;\; x_2 \ge 0 \\ \qquad x_2 - x_3 \le 1 \;;\; x_3 \text{ vrij} \end{array} \right\}$$

Oplossing:

a. Het LP-probleem staat in de standaardgedaante. Volgens de standaardregels luidt het duale probleem:

$$\min\left\{ 6u_1 + 4u_2 + u_3 \;\middle|\; \begin{array}{r} u_1 + u_2 \qquad \geq 1 \\ 2u_1 \qquad + u_3 \geq 1 \\ -3u_1 + u_2 - u_3 \geq 1 \\ u_1, u_2, u_3 \geq 0 \end{array} \right\}$$

b. Gelijkheden worden duaal vrije variabelen en omgekeerd. Het duale probleem luidt derhalve:

$$\min\left\{ 6u_1 + 4u_2 + u_3 \;\middle|\; \begin{array}{r} u_1 + u_2 \qquad \geq 1 \\ 2u_1 \qquad + u_3 \geq 1 \\ -3u_1 + u_2 - u_3 = 1 \\ u_2, u_3 \geq 0;\ u_1 \text{ vrij} \end{array} \right\}$$

Opgave 7

Als $\max \{p^Tx \mid Ax \leq b \;;\; x \geq 0\}$ een oneindige oplossing heeft, dan heeft $\max \{p^Tx \mid Ax \leq c \;;\; c \geq 0\}$ voor geen enkele c een eindige optimale oplossing. Bewijs dit.

Oplossing:

Stel $\max \{p^Tx \mid Ax \leq c \;;\; x \geq 0\}$ heeft voor een zekere c een eindige optimale oplossing.

Dan heeft ook het duale probleem $\min \{c^Tu \mid A^Tu \geq p;\; u \geq 0\}$ een eindige optimale oplossing. Dit probleem is dus in ieder geval toelaatbaar, d.w.z. $\min \{b^Tu \mid A^Tu \geq p;\; u \geq 0\}$ heeft òf een eindige optimale oplossing, òf heeft een oneindige oplossing. In het eerste geval zou $\max \{p^Tx \mid Ax \leq b;\; x \geq 0\}$ een eindige optimale oplossing hebben, en in het tweede geval zou $\max \{p^Tx \mid Ax \leq b;\; x \geq 0\}$ ontoelaatbaar zijn. Beide mogelijkheden zijn in strijd met het gegeven: de bewering is dus waar.

Opgave 8

Beschouw het lineaire programmeringsprobleem $\max \{p^Tx \mid Ax \leq b \;;\; x \geq 0\}$.

Bewijs dat het vinden van een optimale oplossing van dit probleem equivalent is aan het vinden van een toelaatbare oplossing van het stelsel ongelijkheden $Bz \geq d$ met

$$B = \begin{bmatrix} 0 & A^T \\ 0 & I \\ -A & 0 \\ I & 0 \\ p^T & -b^T \end{bmatrix} \text{ en } d = \begin{bmatrix} p \\ 0 \\ -b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Oplossing:

Laat $z = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$. Dan is $Bz \geq d$ equivalent met:

$A^Tu \geq p,\ u \geq 0 \ \rightarrow$ u toelaatbaar voor het duale probleem

$A\,x \leq b,\ x \geq 0 \ \rightarrow$ x toelaatbaar voor het oorspronkelijke probleem

$p^Tx \geq b^Tu \qquad \rightarrow$ waarde oorspronkelijke probleem $\geq$ waarde duale probleem

Omdat voor iedere (x,u) met x toelaatbaar voor het oorspronkelijke probleem en u voor het duale probleem altijd geldt$p^Tx \leq b^Tu$ zijn beide oplossingen optimaal.

Dus: Als $z = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$ toelaatbaar is voor $Bz \geq d$, dan is x optimaal voor $\max\ \{p^Tx \mid Ax \leq b\ ;\ x \geq 0\}$.

Omgekeerd, als x optimaal is voor $\max\ \{p^Tx \mid Ax \leq b\ ;\ x \geq 0\}$, dan is er een corresponderende optimale oplossing u van het duale probleem zdd. $z = \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}$ toelaatbaar is voor $Bz \geq d$.

Opgave 9

a. Geef een voorbeeld van een ontoelaatbaar LP-probleem met een duaal probleem dat ook ontoelaatbaar is.

b. Geef een voorbeeld van een ontoelaatbaar LP-probleem met een duaal probleem dat oneindig is.

Oplossing:

a. Neem het LP-probleem $\max \left\{ -x_1 + x_2 \;\middle|\; \begin{array}{ll} x_1 \leq -1; & x_1 \geq 0 \\ -x_2 \leq 1; & x_2 \geq 0 \end{array} \right\}$

Dit probleem is ontoelaatbaar (geen goede x_1 te vinden). Het duale probleem is $\min \left\{ -u_1 + u_2 \;\middle|\; \begin{array}{ll} u_1 \geq -1; & u_1 \geq 0 \\ -u_2 \geq 1; & u_2 \geq 0 \end{array} \right\}$. Ook dit probleem is ontoelaatbaar (geen goede u_2 te vinden).

b. Beschouw het ontoelaatbare probleem: $\max\ \{x \mid x \leq -1;\ x \geq 0\}$. Het duale probleem is $\min\ \{-u \mid u \geq 1;\ u \geq 0\}$ en dit heeft een oneindige oplossing.

Opgave 10

Beschouw een LP-probleem in de gedaante (14.9), en zij u^* een optimale oplossing van het bijbehorende duale probleem.
Veronderstel dat b in het LP-probleem wordt vervangen door een vector c, en laat x^* de oplossing van dit nieuwe LP-probleem zijn.

Toon aan dat $\Sigma_{j=1}^{n} p_j x_j^* \leq \Sigma_{i=1}^{m} c_i u_i^*$.

Oplossing:

Beschouw de volgende Lp-problemen:

(1) max $\{p^T x \mid Ax \leq b;\ x \geq 0\}$ met duaal min $\{b^T u \mid A^T u \geq p;\ u \geq 0\}$,

waarvoor u^* een optimale oplossing is.

(2) max $\{p^T x \mid Ax \leq c;\ x \geq 0\}$, waarvan x^* een optimale oplossing is met

duaal probleem min $\{c^T u \mid A^T u \geq p;\ u \geq 0\}$.

Omdat u^* toelaatbaar is voor het duale van (2) en op grond van de dualiteitsstelling kunnen we schrijven:

$\Sigma_{i=1}^{m} c_i u_i^* \geq$ optimum duale van (2) = optumum (2) = $\Sigma_{j=1}^{n} p_j x_j^*$.

Opgave 11

Voor LP-problemen met k vrije variabelen geeft de substitutie $x_j = x_j^+ - x_j^-$ met $x_j^+, x_j^- \geq 0$ een equivalente formulering met k extra variabelen.
Toon aan dat het ook mogelijk is om een equivalente formulering, waarin alle variabelen niet-negatief zijn, te verkrijgen met slechts één extra niet-negatieve variabele.

Oplossing:

Vervang iedere vrije variabele x_j door $x_j^+ - w$, met x_j^+ en $w \geq 0$.
Zij x een toelaatbare oplossing van het LP-probleem.
Neem $w = \max\{0, \max_j(-x_j)\}$ en $x_j^+ = x_j + w$. Dan geeft dit een toelaatbare oplossing van het gewijzigde probleem met dezelfde waarde van de doelfunctie.
Omgekeerd, als (x^+, w) een toelaatbare oplossing van het gewijzigde probleem is, dan krijgen we een oplossing van het oorspronkelijke probleem met dezelfde waarde van de doelfunctie door $x_j = x_j^+ - w$ te nemen.

Paragraaf 15: De simplex methode

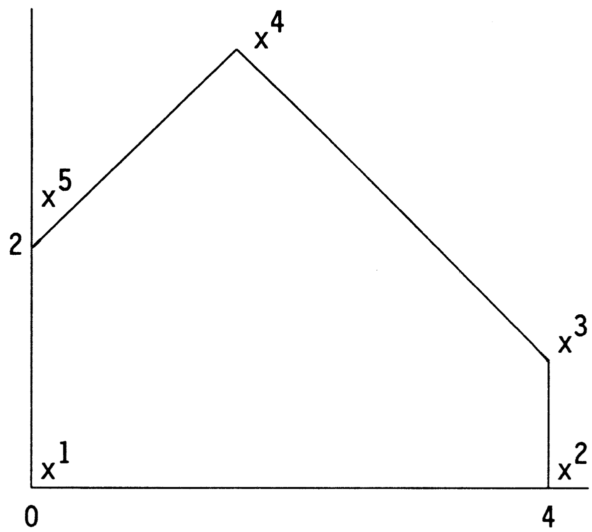
Opgave 1

Geef voor ieder hoekpunt van het lineaire programmeringsprobleem

$$\max \left\{ 2x_1 + x_2 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 \le 5; \\ x_1 \qquad \le 4; \; x_1, x_2 \ge 0 \\ -x_1 + x_2 \le 2; \end{array} \right\}$$

de basisvariabelen, de kegel van toegelaten richtingen en de actieve duale variabelen. Wat is de optimale oplossing van dit probleem?

Oplossing:



Hoekpunt x^1

Basisvariabelen: y_1, y_2, y_3

$S(x^1)$: $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$

$$\begin{cases} -v_1 = 2 \\ -v_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_1 = -2 \\ v_2 = -1 \end{cases}$$

Hoekpunt x^2

Basisvariabelen: y_1, x_1, y_3

$S(x^2)$: $y_2 \ge 0$, $x_2 \ge 0$

$$\begin{cases} u_2 = 2 \\ -v_2 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_2 = 2 \\ v_2 = -1 \end{cases}$$

Hoekpunt x^3

Basisvariabelen: x_1, x_2, y_3

$S(x^1)$: $y_1 \ge 0$, $y_2 \ge 0$

$$\begin{cases} u_1 + u_2 = 2 \\ u_1 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 1 \end{cases}$$

Hoekpunt x^4

Basisvariabelen: x_1, x_2, y_2

$S(x^1)$: $y_1 \ge 0$, $y_3 \ge 0$

$$\begin{cases} u_1 - u_3 = 2 \\ u_1 + u_3 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1 = 3/2 \\ u_3 = -1/2 \end{cases}$$

Hoekpunt x^5

Basisvariabelen: y_1, y_2, x_2

$S(x^1)$: $x_1 \ge 0$, $y_3 \ge 0$

$$\begin{cases} -u_3 - v_1 = 2 \\ u_3 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} v_1 = -3 \\ u_3 = 1 \end{cases}$$

De optimale oplossing correspondeert met het hoekpunt waarin de actieve duale variabelen niet-negatief zijn: x^3.

De optimale oplossing luidt: $x_1 = 4$, $x_2 = 1$ en optimum $= 9$.

Opgave 2

Bepaal met de simplexmethode een optimale oplossing van het probleem uit opgave 1.

Oplossing:

		x_1	x_2
y_1	5	1	1
y_2	4	1^*	0
y_3	2	-1	1
x_0	0	-2	-1

		y_2	x_2
y_1	1	-1	1^*
x_1	4	1	0
y_3	6	1	1
x_0	8	2	-1

		y_2	y_1
x_2	1	-1	1
x_1	4	1	0
y_3	5	2	-1
x_0	9	1	1

De optimale oplossing luidt: $x_1 = 4$, $x_2 = 1$ en het optimum = 9.

Opgave 3

a. Bepaal met de simplexmethode een optimale oplossing van

$$\max \left\{ x_1 + x_2 + x_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 6 \;;\; x_1 \ge 0 \\ x_1 \qquad\quad + x_3 \le 4 \;;\; x_2 \ge 0 \\ \qquad\; x_2 - x_3 \le 1 \;;\; x_3 \ge 0 \end{array} \right\}$$

b. Formuleer het duale probleem en geef ook hiervan een optimale oplossing.

Oplossing:

		x_1	x_2	x_3
y_1	6	1	2	-3
y_2	4	1^*	0	1
y_3	1	0	1	-1
x_0	0	-1	-1	-1

		y_2	x_2	x_3
y_1	2	-1	2	-4
x_1	4	1	0	1
y_3	1	0	1^*	-1
x_0	4	1	-1	0

		y_2	y_3	x_3
y_1	0	-1	-2	-2
x_1	4	1	0	1^*
x_2	1	0	1	-1
x_0	5	1	1	-1

		y_2	y_3	x_1
y_1	8	1	-2	2
x_3	4	1	0	1
x_2	5	1	1	1
x_0	9	2	1	1

De optimale oplossing luidt: $x = 0$, $x = 5$, $x = 4$ en optimum = 9.

b. Het duale probleem luidt:

$$\min \left\{ 6u_1 + 4u_2 + u_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} u_1 + u_2 \qquad\quad \ge 1;\; u_1 \ge 0 \\ 2u_1 \qquad\quad + u_3 \ge 1;\; u_2 \ge 0 \\ -3u_1 + u_2 - u_3 \ge 1;\; u_3 \ge 0 \end{array} \right\}$$

De optimale oplossing volgt uit het optimale simplex tableau: $u_1 = 0$, $u_2 = 2$, $u_3 = 1$ en het optimum = 9.

Opgave 4

Een ijsfabriek heeft een machine die 400 liter ijs kan produceren per uur. Er kunnen 3 soorten ijs (A,B en C) worden geproduceerd welke per liter een winst van resp. *f* 2,-, *f* 1,- en *f* 2,- opleveren.

Voor 15 liter van soort A is nodig: 9 liter room, 30 eieren en 1 kg suiker.
Voor 16 liter van soort B is nodig: 8 liter room, 40 eieren en 2 kg suiker.
Voor 24 liter van soort C is nodig: 12 liter room, 60 eieren en 1 kg suiker.
Per uur is 250 liter soom, 900 eieren en 40 kg suiker beschikbaar.

a. Stel een lineaire programmeringsprobleem op waarmee kan worden berekend hoeveel liter van soort A, soort B en soort C per uur moet worden geproduceerd om een maximale winst te maken.
b. Formuleer het duale lineaire programmeringsprobleem.
c. Bewijs dat een optimale oplossing correspondeert met de produktie van alleen soort A en geef de optimale oplossing van het duale probleem.

Oplossing:

a. Stel x_A, x_B en x_C is de hoeveelheid die van soort A, soort B en soort C resp. wordt geproduceerd. Het LP-probleem wordt dan:

$$\max\left\{ 2x_A + x_B + 2x_C \;\middle|\; \begin{array}{l} x_A + x_B + x_C \le 400;\ x_A \ge 0 \\ \frac{9}{15}x_A + \frac{8}{16}x_B + \frac{12}{24}x_C \le 250;\ x_B \ge 0 \\ \frac{30}{15}x_A + \frac{40}{16}x_B + \frac{60}{24}x_C \le 900;\ x_C \ge 0 \\ \frac{1}{15}x_A + \frac{2}{16}x_B + \frac{1}{24}x_C \le 40; \end{array} \right\}$$

b. Het duale lineaire programmeringsprobleem luidt:

$$\min\left\{ 400u_1 + 250u_2 + 900u_3 + 40\,u_4 \;\middle|\; \begin{array}{l} u_1 + \frac{9}{15}u_2 + \frac{30}{15}u_3 + \frac{1}{15}u_4 \ge 2;\ u_1 \ge 0 \\ u_1 + \frac{8}{16}u_2 + \frac{40}{16}u_3 + \frac{2}{16}u_4 \ge 1;\ u_2 \ge 0,\ u_3 \ge 0 \\ u_1 + \frac{12}{24}u_2 + \frac{60}{24}u_3 + \frac{1}{24}u_4 \ge 2;\ u_4 \ge 0 \end{array} \right\}$$

c. Indien $x_A = 400$ en $x_B = x_C = 0$, dan is $y_1 = 0$, $y_2 > 0$, $y_3 > 0$ en $y_4 > 0$.
Voor de bijbehorende duale oplossing geldt: $u_2 = u_3 = u_4 = v_1 = 0$.
Hieruit volgt voor de overige variabelen: $u_1 = 2$, $v_2 = 1$, $v_3 = 0$.
De bijbehorende oplossing is niet-negatief, dus beide oplossingen zijn optimaal.

Opgave 5

Beschouw het volgende lineaire programmeringsprobleem:

$$\max\left\{ x_1 - 5x_2 - 2x_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - x_3 = 8\ ; \\ x_1 - 3x_2 \le 3\ ; \end{array}\ x_1, x_2\ x_3 \ge 0 \right\} .$$

a. Los het probleem op met de simplexmethode.
b. Formuleer het duale probleem en geef een optimale oplossing ervan.

Oplossing:

a.

		x_1	x_2	x_3
z_1	8	2	-1	-1
y_2	3	1^*	-3	0
x_0	0	-1	5	2
z_0	-8	-2	1	1

		y_2	x_2	x_3
z_1	2	-2	5^*	-1
x_1	3	1	-3	0
x_0	3	1	2	2
z_0	-2	2	-5	1

		y_2	z_1	x_3
x_2	2/5	-2/5	1/5	-1/5
x_1	21/5	-1/5	3/5	-3/5
x_0	11/5	9/5	-2/5	12/5
z_0	0	0	1	0

De optimale oplossing is: $x_1 = \frac{21}{5}$, $x_2 = \frac{2}{5}$, $x_3 = 0$ en het optimum $= \frac{11}{5}$.

b. $$\min \left\{ 8u_1 + 3u_2 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2u_1 + u_2 \geq 1; \\ -u_1 - 3u_2 \geq -5;\; u_2 \geq 0 \\ -u_1 \geq -2; \end{array} \right\}$$

De optimale oplossing is: $u_1 = -\frac{2}{5}$, $u_2 = \frac{9}{5}$ en optimum $= \frac{11}{5}$.

Opgave 6

Beschouw een produktieproces, waarbij de stoffen A,B,C en D als volgt in produkten E, F en G worden omgezet:

1 kg A + 1 kg B $\rightarrow$ 1 kg E + 1 kg D ;
2 kg B + 1 kg C $\rightarrow$ 1 kg F + 2 kg D ;
1 kg A + 4 kg D $\rightarrow$ 1 kg G + 3 kg B + 1 kg C.

De produkten E, F en G worden verkocht tegen prijzen van resp. f 100,-, f 200,- en f 300,- per kg.
Verder moet het produktieproces aan de volgende eisen voldoen:
van stof A kan hoogstens 400 kg worden gebruikt;
van stof B moet precies 600 kg worden gebruikt;
van stof C moet minstens 100 kg worden gebruikt.

a. Hoeveel moet van de stoffen E, F en G worden geproduceerd om de opbrengst te maximaliseren? Los dit probleem op met de simplexmethode.
b. Hoe luidt het duale probleem en wat is een optimale oplossing ervan?

Oplossing:

a. Laat x_1 de productie van stof E, x_2 de productie van stof F en x_3 de productie van stof G zijn (in kg). Het LP-probleem luidt:

$$\max \left\{ 100x_1 + 200x_2 + 300x_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_3 \leq 400;\; x_1 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 600;\; x_2 \geq 0 \\ x_2 - x_3 \geq 100;\; x_3 \geq 0 \end{array} \right\}$$

De oplossing met de simplex methode is:

		x_1	x_2	x_3	y_3
y_1	400	1	0	1	0
z_2	600	1	2	-3	0
z_3	100	0	1^*	-1	-1
x_0	0	-100	-200	-300	0
z_0	-700	-1	-3	4	1

		x_1	z_3	x_3	y_3
y_1	400	1	0	1	0
z_2	400	1	-2	-1	2^*
x_2	100	0	1	-1	-1
x_0	20000	-100	200	-500	-200
z_0	-400	-1	3	1	-2

		x_1	z_3	x_3	z_2
y_1	400	1	0	1^*	0
y_3	200	1/2	-1	-1/2	1/2
x_2	300	1/2	0	-3/2	1/2
x_0	60000	0	0	-600	100
z_0	0	0	1	0	1

		x_1	z_3	y_1	z_2
x_3	400	1	0	1	0
y_3	400	1	-1	1/2	1/2
x_2	900	2	0	3/2	1/2
x_0	300000	600	0	600	100

De optimale oplossing is:
$x_1 = 0$, $x_2 = 900$, $x_3 = 400$ en het optimum = 300.000

b. Het duale probleem luidt:

$$\min \left\{ 400\,u_1 + 600u_2 - 100u_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} u_1 + u_2 \geq 100;\; u_1 \geq 0 \\ 2u_2 - u_3 \geq 200; \\ u_1 - 3u_2 + u_3 \geq 300;\; u_3 \geq 0 \end{array} \right\}$$

De oplossing is: $u_1 = 600$, $u_2 = 100$, $u_3 = 0$ en het optimum = 300.000

Opgave 7

a. Bepaal met de simplexmethode een optimale oplossing van:

$$\max \left\{ 8x_1 - 3x_2 - 2x_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 \leq 5\;;\; x_1 \geq 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 7\;;\; x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 4\;;\; x_3 \geq 0 \end{array} \right\}$$

b. Formuleer het duale probleem en geef ook hiervan een optimale oplossing.
c. Is de oplossing van het oorspronkelijke probleem uniek? En de oplossing van het duale probleem? Verklaar uw antwoord.

Oplossing:

a. De simplex methode geeft het volgende:

		x_1	x_2	x_3
y_1	5	1	-1	1
y_2	7	1	-1	2
z_3	4	1^*	1	-3
x_0	0	-8	3	2
z_0	-4	-1	-1	3

		z_3	x_2	x_3
y_1	1	-1	-2	4^*
y_2	3	-1	-2	5
x_1	4	1	1	-3
x_0	32	8	11	-22
z_0	0	1	0	0

		z_3	x_2	y_1
x_3	1/4	-1/4	-1/2	1/4
y_2	7/4	1/4	1/2	-5/4
x_1	19/4	1/4	-1/2	3/4
x_0	75/2	5/2	0	11/2

De optimale oplossing is: $x_1 = \frac{19}{4}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{4}$ en het optimum $= 37\frac{1}{2}$.

b. Het duale probleem luidt:

$$\min\left\{5u_1 + 7u_2 + 4u_3 \;\middle|\; \begin{array}{l} u_1 + u_2 + u_3 \geq 8;\ u_1 \geq 0 \\ -u_1 - u_2 + u_3 \geq -3;\ u_2 \geq 0 \\ u_1 + 2u_2 - 3u_3 \geq -2; \end{array}\right\}$$

met optimale oplossing: $u_1 = \frac{11}{2}$, $u_2 = 0$, $u_3 = \frac{5}{2}$ en waarde $= 37\frac{1}{2}$.

c. Neen, omdat in de onderste rij in de kolom van x_2 een 0 staat, kunnen x_2 en y_2 worden verwisseld, waardoor een andere optimale oplossing ontstaat, nl. $x_1 = 13/2$, $x_2 = 7/2$ en $x_3 = 2$.
De oplossing van het duale probleem is wel uniek. omdat in de eerste kolom slechts positieve getallen staan.

Opgave 8

a. Los het volgende lineaire programmeringsprobleem op:

$$\max\left\{3x_1+4x_2+x_3+2x_4+2x_5+x_6 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 - 2x_3 + x_4 - x_6 \leq 2\frac{1}{2};\ x_1, x_2 \geq 0 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_4 - x_5 + x_6 \geq \frac{1}{2};\ x_3, x_4 \geq 0 \\ x_2 + x_3 = 1;\ x_5, x_6 \geq 0 \\ x_4 + x_5 + x_6 = 1; \end{array}\right\}$$

b. Formuleer het duale probleem en geef ook hiervan een optimale oplossing.

Oplossing:

a. De simplex methode staat hieronder uitgewerkt. De kolommen van de schijnvariabelen die niet meer in de basis zitten laten we weg.

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_2
y_1	$\frac{5}{2}$	1	0	-2	1	0	-1	0
z_2	$\frac{1}{2}$	1	-2	0	2^*	-1	1	-1
z_3	1	0	1	1	0	0	0	0
z_4	1	0	0	0	1	1	1	0
x_0	0	-3	-4	-1	-2	-2	-1	0
z_0	$-\frac{5}{2}$	-1	1	-1	-3	0	-2	1

		x_1	x_2	x_3	x_5	x_6	y_2
y_1	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	-2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
z_3	1	0	1	1	0	0	0
z_4	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1^*	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_0	$\frac{1}{2}$	-2	-6	-1	-3	0	-1
z_0	$-\frac{7}{4}$	$\frac{1}{2}$	-2	-1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

		x_1	x_3	x_5	x_6	y_2
y_1	$\frac{3}{2}$	1	-2	-1	-2	0
x_4	1	0	0	1	0	0
z_3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}^*$	1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_2	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_0	5	-5	-1	6	3	2
z_0	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

		x_3	x_5	x_6	y_2
y_1	1	-4	2^*	-1	1
x_4	1	0	1	1	0
x_1	$\frac{1}{2}$	2	-3	-1	-1
x_2	1	1	0	0	0
x_0	$\frac{15}{2}$	9	-9	-2	-3
z_0	0	0	0	0	0

		x_3	y_1	x_6	y_2
x_5	$\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_4	$\frac{1}{2}$	2^*	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_1	2	-4	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	1	1	0	0	0
x_0	12	-9	$\frac{9}{2}$	$-\frac{13}{2}$	$\frac{3}{2}$

		x_4	y_1	x_6	y_2
x_5	1	1	0	1	0
x_3	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$
x_1	3	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
x_2	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}^*$
x_0	$\frac{57}{4}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$

		x_4	y_1	x_6	x_2
x_5	1	1	0	1^*	0
x_3	1	0	0	0	1
x_1	$\frac{9}{2}$	1	1	-1	2
y_2	3	-2	1	-3	4
x_0	$\frac{33}{2}$	3	3	-2	3

		x_4	y_1	x_5	x_2
x_6	1	1	0	1	0
x_3	1	0	0	0	1
x_1	$\frac{11}{2}$	2	1	1	2
y_2	6	1	1	3	4
x_0	$\frac{37}{2}$	5	3	2	3

De optimale oplossing is:

$x_1 = 11/2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 1$ en het optimum $= 37/2$.

b. Het duale probleem luidt:

$$\min\left\{\frac{5}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 + u_3 + u_4 \;\middle|\; \begin{array}{rrrrl} u_1 & - u_2 & & & \geq 3; \\ & 2u_2 & + u_3 & & \geq 4; \quad u_1 \geq 0 \\ -2u_1 & & + u_3 & & \geq 1; \\ u_1 & - 2u_2 & & + u_4 & \geq 2; \\ & u_2 & & + u_4 & \geq 2; \quad u_2 \geq 0 \\ -u_1 & - u_2 & & + u_4 & \geq 1; \end{array}\right\}$$

De optimale oplossing volgt gedeeltelijk uit het laatste simplex tableau:
$u_1 = 3$ en $u_2 = 0$. De andere u's volgen uit de orthogonaliteitsrelaties:
$v_2 = 3 \rightarrow u_3 = 4 + v_2 + 2u_2 = 7$
$v_4 = 5 \rightarrow u_4 = 2 + v_4 - u_1 - 2u_2 = 4$
De waarde van de doelfunctie is eveneens 37/2.

Opgave 9

Beschouw het volgende lineaire programmeringsprobleem:

$$\max\left\{x_1 - 3x_2 + x_3 \;\middle|\; \begin{array}{rrrl} x_1 & + 2x_2 & - 3x_3 & \leq 3 \;;\; x_1 \geq 0 \\ x_1 & & + x_3 & \leq 5 \;;\; x_2 \geq 0 \\ & - x_2 & + x_3 & \leq 0 \;;\; x_3 \geq 0 \end{array}\right\}$$

a. Bepaal met de simplexmethode een optimale oplossing.
b. Formuleer het duale probleem en geef ook hiervan een optimale oplossing.
c. Wat is een optimale oplossing als de eerste beperking luidt:
   $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3$?
d. Wat is een optimale oplossing als niet wordt geëist dat $x_2 \geq 0$ is?

Oplossing:

a. Hieronder is de simplex methode in tableauvorm uitgewerkt.

		x_1	x_2	x_3
y_1	3	1^*	2	-3
y_2	5	1	0	1
y_3	0	0	-1	1
x_0	0	-1	3	-1

		y_1	x_2	x_3
x_1	3	1	2	-3
y_2	2	-1	-2	4
y_3	0	0	-1	1^*
x_0	3	1	5	-4

		y_1	x_2	y_3
x_1	3	1	-1	3
y_2	2	-1	2	-4
x_3	0	0	-1	1
x_0	3	1	1	4

De optimale oplossing is: $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ met waarde = 3.

b. Het duale probleem luidt:

$$\min \left\{ 3u_1 + 5u_2 \;\middle|\; \begin{array}{rcl} u_1 + u_2 & \geq & 1;\; u_1 \geq 0 \\ 2u_1 \qquad - u_3 & \geq & -3;\; u_2 \geq 0 \\ -3u_1 + u_2 + u_3 & \geq & 1;\; u_3 \geq 0 \end{array} \right\}$$

met optimale oplossing $u_1 = 1$, $u_2 = 0$, $u_3 = 4$ en optimum 3.

c. De oplossing blijft hetzelfde, want aan de gelijkheid is in het optimum reeds voldaan.

d. Vervang dan x_2 door $x_2^+ - x_2^-$ met $x_2^+, x_2^- \geq 0$. Dit geeft in het tableau een extra kolom tegengesteld aan de kolom van x_2. Vervolgens gaan we weer een optimaal tableau construeren:

		y_1	x_2^+	x_2^-	y_3
x_1	3	1	-1	1	3
y_2	2	-1	2	-2	-4
x_3	0	0	-1	1^*	1
x_0	3	1	1	-1	4

		y_1	x_2^+	x_3	y_3
x_1	3	1	0	-1	2
y_2	2	-1	0	2	-2
x_2^-	0	0	-1	1	1
x_0	3	1	0	1	5

We zien dat de basis is veranderd, maar de optimale oplossing niet (wel de optimale duale oplossing).

Opgave 10

Een bedrijf heeft 10 arbeiders in dienst en beschikt verder over 3 machines van type A en 2 van type B. Het kan daarmee 3 produkten maken: X, Y en Z.
Voor het maken van X zijn per produktie-eenheid 4 arbeiders en 1 machine van type A nodig; voor het maken van Y zijn per produktie-eenheid 3 arbeiders, 1 machine van type A en 1 machine van type B nodig; voor het maken van produkt Z zijn per produktie-eenheid 2 arbieders en 2 machines van type B nodig.
De opbrengsten van deze produkten zijn voor X, Y en Z resp. *f* 1000,-, *f* 500,- en *f* 800,- per eenheid.
Beschouw het produktieproces gedurende één dag (de produktietijd voor het maken van een eenheid van X, Y of Z is ook één dag, en de produkten kunnen tegelijk worden geproduceerd).
Gevraagd wordt hoeveel van de produkten X, Y en Z geproduceerd moet worden om de winst te maximaliseren.

a. Formuleer dit probleem als een lineair programmeringsprobleem.
b. Los dit probleem op met de simplex methode.
c. Formuleer het duale probleem en geef de optimale oplossing er van.

d. Als het f 100,- per dag kost om over een machine van type A te beschikken, is het dan voor het bedrijf voordelig om over slechts 2 machines van type A te beschikken? Verklaar uw antwoord.

e. Als het f 200,- per dag kost om een extra arbeider in te zetten, is het dan voor het bedrijf voordelig om meer arbeiders te hebben? Zo ja, hoeveel meer is het gunstigst?

Oplossing:

a. Laat x_1, x_2 en x_3 de hoeveelheid zijn die van product X, Y en Z resp. wordt gemaakt. Het LP-probleem luidt dan:

$$\max\left\{1000x_1 + 500x_2 + 800x_3 \;\middle|\; \begin{array}{llll} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 & \le 10; & x_1 \ge 0 \\ x_1 + x_2 & \le 3; & x_2 \ge 0 \\ x_2 + 2x_3 & \le 2; & x_3 \ge 0 \end{array}\right\}$$

b. Hieronder staan de simplex tableaux (de doelfunctie is door 100 gedeeld).

		x_1	x_2	x_3
y_1	10	4^*	3	2
y_2	3	1	1	0
y_3	2	0	1	2
x_0	0	-10	-5	-8

		y_1	x_2	x_3
x_1	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
y_2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$
y_3	2	0	1	2^*
x_0	25	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	-3

		y_1	x_2	y_3
x_1	2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
y_2	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
x_3	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_0	28	$\frac{5}{2}$	4	$\frac{3}{2}$

De optimale oplossing luidt: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ en het optimum = 2800.

c. Het duale probleem is:

$$\min\left\{10u_1 + 3u_2 + 2u_3 \;\middle|\; \begin{array}{llll} 4u_1 + u_2 & \ge & 1000; & u_1 \ge 0 \\ 3u_1 + u_2 + u_3 & \ge & 500; & u_2 \ge 0 \\ 2u_1 + 2u_3 & \ge & 800; & u_3 \ge 0 \end{array}\right\}$$

met optimale oplossing: $u_1 = 250$, $u_2 = 0$, $u_3 = 150$ en de optimale waarde = 2800.

d. Ja, want in de optimale oplossing is $y_2 = 1$, d.w.z. één machine is overbodig.

e. Veronderstel dat er x_4 extra arbeiders in dienst worden genomen.
Dan wordt de eerste beperking: $4x_1 + 3x_2 + 2x_3 \ge 10 + x_4$, terwijl de doelfunctie de gedaante $1000x_1 + 500x_2 + 800x_3 - 200x_4$ krijgt.
Dit nieuwe LP-probleem wordt hieronder opgelost.

		x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	10	4^*	3	2	-1
y_2	3	1	1	0	0
y_3	2	0	1	2	0
x_0	0	-10	-5	-8	2

		y_1	x_2	x_3	x_4
x_1	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
y_2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
y_3	2	0	1	2^*	0
x_0	25	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	-3	$-\frac{1}{2}$

		y_1	x_2	y_3	x_4
x_1	2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
y_2	1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}^*$
x_3	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
x_0	28	$\frac{5}{2}$	4	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$

		y_1	x_2	y_3	y_2
x_1	3	0	1	0	1
x_4	4	-1	2	1	4
x_3	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
x_0	30	2	5	2	2

Het is dus het gunstigst om 4 extra arbeiders in dienst te nemen.

Opgave 11

Beschouw het probleem

$$\max\left\{ 2x_1 + x_2 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 5\,; \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 0\,; \\ 6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21\,; \end{array} \; x_j \geq 0\;,\; j = 1,2,\ldots,5 \right\}$$

Toon aan, zonder probleem op te lossen, dat x_1, x_2 x_4 de basisvariabelen zijn behorende bij een optimale oplossing.

Oplossing:

x is de unieke oplossing van:

$$\text{De basis matrix } B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 5 \\ -x_1 + x_2 + x_4 & = & 0 \\ 6x_1 + 2x_2 & = & 21 \end{array} \rightarrow \begin{array}{rcl} x_1 & = & 11/4 \\ x_2 & = & 9/4 \\ x_4 & = & 1/2 \end{array}$$

De beperkingen van het bijbehorende duale LP-probleem zijn:

$$\begin{cases} u_1 - u_2 + 6u_3 - v_1 = 2 \\ u_1 + u_2 + 2u_3 - v_2 = 1 \end{cases}$$

Uit de orthogonaliteit volgt dat voor de met x corresponderende duale oplossing geldt: $v_1 = 0$, $v_2 = 0$ en $u_2 = 0$. Het stelsel wordt dus:

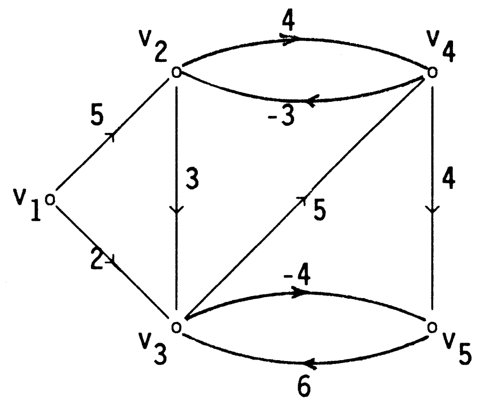
$$\begin{cases} u_1 + 6u_3 = 2 \\ u_1 + 2u_3 = 1 \end{cases} \rightarrow u_1 = 1/2 \text{ en } u_3 = 1/4.$$

Omdat deze oplossing niet-negatief is, is x de oplossing van het LP-probleem en u van het duale probleem.

Paragraaf 16: Kortste paden in netwerken

Opgave 1

Bepaal met de simplexmethode de kortste paden vanuit v_1 voor onderstaand netwerk.



Oplossing:

<u>1e iteratie:</u>

1. Start met de boom $\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_4),(v_4,v_5)\}$.
   $u_1 = 0$; $u_2 = 5$; $u_3 = 8$; $u_4 = 13$; $u_5 = 17$.
2. $v_{13} = 2 + 0 - 8 = -6$.
3. Boom = $\{(v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_3,v_4),(v_4,v_5)\}$.
   $u_3 = 2$; $u_4 = 7$; $u_5 = 11$.

<u>2e iteratie:</u>

2. $v_{23} = 3 + 5 - 2 = 6$; $v_{24} = 4 + 5 - 7 = 2$; $v_{35} = -4 - 2 - 11 = -13$.
3. Boom = $\{(v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_3,v_4),(v_3,v_5)\}$.
   $u_5 = -2$.

<u>3e iteratie:</u>

2. $v_{23} = 3 + 5 - 2 = 6$; $v_{24} = 4 + 5 - 7 = 2$; $v_{42} = -3 + 7 - 5 = -1$
3. Boom = $\{(v_4,v_2),(v_1,v_3),(v_3,v_4),(v_3,v_5)\}$.
   $u_2 = 4$.

<u>4e iteratie:</u>

2. $v_{12} = 5 + 0 - 4 = 1$; $v_{23} = 3 + 4 - 2 = 5$; $v_{24} = 4 + 4 - 7 = 1$;
   $v_{45} = 4 + 7 - (-2) = 13$; $v_{53} = 6 + (-2) - 2 = 2$.
   deze oplossing is optimaal met $u^* = (0,4,2,7,-2)$.

Opgave 2

Beschouw de gerichte graaf $G = (V,A)$ met $V = \{v_1,v_2,v_3\}$, $A = \{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_2)\}$ en de lengte functie l met $l_{12} = 10$, $l_{23} = 1$, $l_{32} = -1$.
Toon aan dat de Bellman vergelijkingen voor dit netwerk geen unieke oplossing hebben. Karakteriseer de verzameling van alle oplossingen.

Oplossing:

De Bellman-vergelijkingen luiden:

$u_1 = 0$; $u_2 = \min(10, u_3 - 1)$; $u_3 = u_2 + 1$.

De oplossing is niet uniek, want zowel $u = (0,10,11)$ als $u = (0,1,2)$ voldoen.

De verz. van alle oplossingen luidt: $u = (0, u_3 - 1, u_3)$ met $u_3 \le 11$.

Opgave 3

Beschouw een gerichte graaf $G = (V,A)$ waarin geen ronden voorkomen.

a. Toon aan dat de knooppunten zo genummerd kunnen worden dat $(v_i, v_j) \in A$ impliceert $i < j$.

b. Geef een algoritme, verschillend van de simplexmethode, om de lengten van de kortste paden in dit netwerk te bepalen.

c. Geef een algoritme om de lengten van de langste paden in dit netwerk te bepalen.

d. Pas bovenstaande onderdelen toe op het netwerk met lengten (de niet genoemde pijlen komen niet voor):

$l_{12} = 1$	$l_{32} = 3$	$l_{43} = -4$	$l_{53} = 2$
$l_{13} = 0$	$l_{36} = -1$	$l_{45} = 4$	
$l_{26} = -2$	$l_{41} = -5$	$l_{51} = 0$	

Oplossing:

a. Er is een knooppunt met geen binnenkomende pijlen (anders is er een ronde, loop beginnend in een willekeurig knooppunt steeds terug).
Geef dit knooppunt nummer 1. Laat dit knooppunt met de daarbij behorende pijlen weg en herhaal het bovenstaande ,etc.
Het is eenvoudig in te zien dat deze constructie voldoet.

b. Uit de Bellman-vergelijkingen voor dit netwerk volgt voor $i \neq 1$:

$$u_i = \min_{k<i} (u_k + l_{ki}),$$

zodat de getallen $u_2, u_3, \ldots, u_n$ successievelijk zijn te bepalen.

c. Op geheel analoge wijze volgt dat in dit netwerk voor het langste pad geldt

$$u_i = \max_{k<i} (u_k + l_{ki}),$$

d. De hernummering is als volgt:

nieuw knooppunt 1 : oud knooppunt 4
nieuw knooppunt 2 : oud knooppunt 5
nieuw knooppunt 3 : oud knooppunt 1
nieuw knooppunt 4 : oud knooppunt 3
nieuw knooppunt 5 : oud knooppunt 2
nieuw knooppunt 6 : oud knooppunt 6

De lengten van de kortste paden worden (voor het gemak gebruiken we de oude nummers):

$u_4 = 0$; $u_5 = 4$; $u_1 = \min (0 - 5, 4 + 0) = -5$;

$u_3 = \min (0 - 4, 4 + 2, - 5 + 0) = -5$; $u_2 = \min (-5 + 1, -5 + 3) = -4$;

$u_6 = \min (-5-1, -4-2) = -6$.

Analoog krijgen we de lengten van de langste paden:

$u_4 = 0$; $u_5 = 4$; $u_1 = \max (0 - 5, 4 + 0) = 4$;

$u_3 = \max (0 - 4, 4 + 2, 4 + 0) = 6$; $u_2 = \max (4 + 1, 6 + 3) = 9$;

$u_6 = \max (6-1, 9-2) = 7$.

Opgave 4

Laat x een basisoplossing zijn van het LP-probleem (16.5) met corresponderende voortbrengende boom T.

Als x_{ki} een basisvariabele is, dan is de waarde er van gelijk aan het aantal in T vanuit v_i bereikbare knooppunten, inclusief v_i zelf. Toon dit aan.

Oplossing:

Als x_{ki} een basisvariabele is, dan is $x_{ji} = 0$ voor alle $j \neq k$. Uit het LP-probleem (16.5) volgt:

$$x_{ki} = 1 + \Sigma_j \, x_{ij}$$

We passen nu inductie toe vanaf de eindpunten i van de bijbehorende boom (daarvoor is $x_{ij} = 0$ voor alle j en klopt het dus). Er geldt dan:

x_{ki} = 1 + de som over alle knooppunten j zdd. (v_i, v_j) tot de boom behoort van het aantal vanuit v_j bereikbare knooppunten incl. v_j zelf

= het aantal vanuit v_i bereikbare knooppunten incl. v_i zelf.

HOOFDSTUK V: KOPPELINGEN

Paragraaf 17: De huwelijksstelling van Hall

Opgave 1.

Beschouw het volgende huwelijksprobleem met 5 jongens en 5 meisjes:
j_1 is bevriend met meisje m_1; j_2 met de meisjes m_2,m_5; j_3 met de meisjes m_1,m_3,m_4 en m_5; j_4 met meisje m_5 en j_5 met de meisjes m_1,m_2 en m_5.

a. Bepaal hoeveel huwelijken er maximaal mogelijk zijn.
b. Verklaar waarom er geen volledige koppeling mogelijk is.

Oplossing:

a. Als we de eerst mogelijke keuze voor iedere jongen nemen, dan krijgen we: $(j_1\&m_1)$, $(j_2\&m_2)$, $(j_3\&m_3)$, $(j_4\&m_5)$. Zie onderdeel b voor het bewijs dat deze koppeling maximaal is.
b. De jongens j_1, j_2, j_4 en j_5 zijn slechts met 3 meisjes bevriend, nl. met m_1, m_2 en m_5.

Opgave 2

Toon aan dat als iedere jongen met precies r meisjes en ieder meisje met precies r jongens bevriend is, het huwelijksprobleem een oplossing heeft (r is een willekeurig natuurlijk getal).

Oplossing:

Stel dat dit niet zo is. Dan zijn er k jongens zdd. deze met hoogstens (k-1) meisjes bevriend zijn. Dus $k \cdot r$ takken lopen naar (k-1) meisjes: er is minstens één meisje dat incident is met meer dan r takken: tegenspraak.

Paragraaf 18: Transversalen

Opgave 1

Welke van de volgende stelsels deelverz. van {1,2,3,4,5} hebben een transversaal:

(i) ({1},{2,3},{1,2},{1,3},{1,4,5})

(ii) ({1,2},{2,3},{4,5},{4,5})

(iii) ({1,3},{2,3},{1,2},{3})

(iv) ({1,3,4},{1,4,5},{2,3,5},{2,4,5})

Oplossing:

(i) geen transversaal, want $|\cup_{j=1}^{4} S_j| = 3$.

(ii) wel een transversaal, want (1,2,4,5) is een stelsel representanten.

(iii) geen transversaal, want $|\cup_{j=1}^{4} S_j| = 3$.

(iv) wel een transversaal, want (1,4,2,5) is een stelsel representanten.

Opgave 2

Zij $E = \{1,2,\ldots,n\}$.

Hoeveel verschillende transversalen heeft de collectie van verzamelingen ({1,2},{2,3},{3,4},...,{n-1,n},{n,1}) ?

Oplossing:

Twee, nl. als we uit S_1 het getal 1 nemen, dan ligt de rest vast:

n uit S_n, n-1 uit S_{n-1},..., 2 uit S_2; nemen we uit S_1 de 2, dan is gedwongen:

3 uit S_2, 4 uit S_3,...,n uit S_{n-1}en 1 uit S_n.

Opgave 3

Zij $E = \{a,b,c,d,e\}$, $\mathcal{S} = \{a,c,e\},\{e,d\},\{b,d\},\{b,d\})$ en $X = \{a,b,c\}$.

Verifieer de uitspraak van gevolg 18.5 voor t = 2 en t = 3.

Oplossing:

Als t = 2: t-n = -2, zodat er alleen iets te controleren valt voor een verz. I met #I ≥ 3.

als $I = \{S_1, S_2, S_3\} \rightarrow |(\cup S_i) \cap X| = 3 \geq 1$: klopt;

als $I = \{S_1, S_2, S_4\} \rightarrow |(\cup S_i) \cap X| = 3 \geq 1$: klopt;

als $I = \{S_1, S_3, S_4\} \rightarrow |(\cup S_i) \cap X| = 3 \geq 1$: klopt;

als $I = \{S_2, S_3, S_4\} \rightarrow |(\cup S_i) \cap X| = 1 \geq 1$: klopt;

als $I = \{S_1, S_2, S_3, S_4\} \rightarrow |(\cup S_i) \cap X| = 3 \geq 2$: klopt;

Dus X bevat een partiële transversaal van X met 2 elementen.

Als $t = 3$: $t-n = -1$, zodat er alleen iets te controleren valt voor een verz. I met $\#I \geq 2$.

Neem $I = \{S_2, S_3, S_4\} \rightarrow |(\cup S_i) \cap X| = 1 < 2$: er is dus geen partiële transversaal van X met 3 elementen.

Paragraaf 19: Toepassingen van de stelling van Hall

Opgave 1

Op hoeveel manieren is de (3 x 5)-Latijnse rechthoek

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

uit te breiden tot een latijns vierkant?

Oplossing:

Passen we de techniek van stelling 19.1 toe, dan krijgen we:
$S_1 = \{4,5\}$, $S_2 = \{1,3\}$, $S_3 = \{4,5\}$, $S_4 = \{2,3\}$ en $S_5 = \{1,2\}$.
Door alle mogelijkheden uit te proberen, vinden we dat er 4 stelsels van representanten zijn : (4,1,5,3,2), (4,3,5,2,1), (5,1,4,3,2) en (5,3,4,2,1). De vierde rij is dus op 4 manieren te maken en voor de laatste rij is geen keus: in totaal 4 manieren.

Opgave 2

Bewijs dat de stelling van Hall uit de max-min stelling volgt.

Oplossing:

Construeer de volgende $m \times n$ matrix A (m = #jongens en n = #meisjes) :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als de } i\text{-de jongen met het } j\text{-de meisje bevriend is} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Volgens de max-min stelling is het maximum aantal onafhankelijke énen (dat is het aantal elementen in een maximale koppeling) gelijk aan het minimum aantal rijen en kolommem om alle énen te vangen (zeg dat dit minimum wordt aangenomen door de eerste a rijen en b kolommem door te strepen). De matrix A heeft dan de volgende vorm:

$$A = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array}\right] & \begin{array}{l} a \\ m-a \end{array} \\ \begin{array}{cc} b & n-b \end{array} & \end{array}$$

De m-a jongens behorende bij de laatste m-a rijen zijn volgens het gegeven bevriend met minstens m-a meisjes; anderzijds volgt uit matrix A dat ze bevriend zijn met hoogstens b meisjes (de eerste b):
$m-a \leq$ het aantal meisjes bevriend met de laatste m-a jongens $\leq b$, dus:
$a+b \geq m$, d.w.z. het aantal elementen in een maximale koppeling = $a+b \geq m$: alle jongens worden gekoppeld.

Opgave 3

Een bedrijf heeft 9 werknemers. Op zekere dag wil het bedrijf 9 opdrachten uitvoeren die ieder 1 man-dag vergen.

Niet iedere opdracht kan door iedere werknemer worden verricht. Onderstaande tabel geeft de toegelaten combinaties aan.

Job	Werknemers die de job kunnen uitvoeren
1	1,2,6,8
2	5,6
3	1,2,3,4,9
4	2,5,6
5	4,7,8,9
6	2,8
7	1,6
8	2,5,6,8
9	3,7,9

Het bedrijf wil weten of alle 9 opdrachten op die dag uitgevoerd kunnen worden.

a. Bepaal een graaf z.d.d. het bestaan van een volledige koppeling in de graaf correspondeert met het kunnen uitvoeren van alle opdrachten.

b. Toon m.b.v. de stelling van Hall aan dat de opdrachten niet allemaal uitgevoerd kunnen worden.

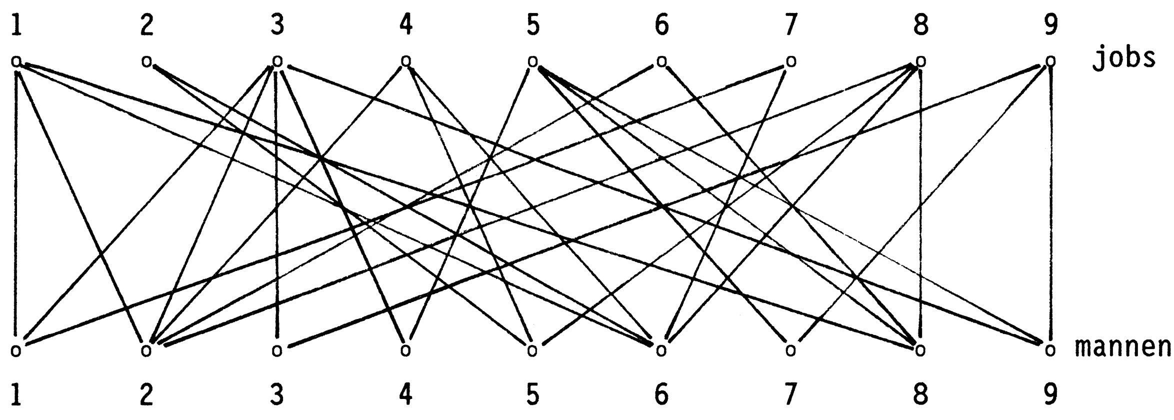
c. Stel een (0,1)-matrix op z.d.d. het maximum aantal onafhankelijke énen in deze matrix aangeeft of alle opdrachten uitgevoerd kunnen worden.

d. Toon met de max-min stelling van König-Egerváry aan dat niet alle opdrachten uitgevoerd kunnen worden.

e. Hoeveel opdrachten kunnen er op die dag maximaal worden uitgevoerd?

Oplossing:

a.



b. De 6 jobs 1,2,4,6,7,8 kunnen slechts uitgevoerd worden door de 5 mannen 1,2,5,6,8.

c.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1^{\#} & 0 & 0 & 0 & \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1^{\#} & * \\
0 & 1^{\#} & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 1^{\#} & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & * \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1^{\#} & 0 & \\
1^{\#} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1^{\#} & 1 & 0 & 1 & 0 & \\
0 & 0 & 1^{\#} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & * \\
* & * & & & * & * & & * & &
\end{array}
$$

d. De énen zijn met 8 strepen te vangen, nl. met 3 rijen en 5 kolommem, zoals in bovenstaande matrix met een * is aangegeven.

e. 8 kunnen er worden uitgevoerd. Deze zijn in de matrix met een # aangegeven.

Opgave 4

Zij $G = (V,E)$ een graaf. $W \subseteq V$ heet een knooppuntenbedekking als iedere $e \in E$ incident is met tenminste één $w \in W$.
Bewijs dat in een bipartiete graaf het maximum aantal takken in een koppeling gelijk is aan het minimum aantal knooppunten in een knooppuntenbedekking.

Oplossing:

Bij een bipartiete graaf hoort op de gebruikelijke manier een (0,1)-matrix.
Volgens de stelling van König-Egerváry is het maximum aantal onafhankelijke énen gelijk aan het minimum aantal rijen en kolommen waar alle énen in zitten. Onafhankelijke énen corresponderen met een koppeling. De rijen en kolommem waar alle énen in zitten vormen een knooppunten bedekking:
Het maximum aantal takken in een koppeling is dus gelijk aan het minimum aantal knooppunten in een knooppuntenbedekking.

Opgave 5

Verifiëer de stelling van König-Egerváry voor de volgende matrices:

a. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Oplossing:

a.
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1^{\#} & 1 \\ 1^{\#} & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1^{\#} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1^{\#} \end{bmatrix}$$

Er zijn 4 onafhankelijke énen, aangegeven met #, en door alle rijen door te strepen worden uiteraard alle énen gevangen.

b.
$$\begin{bmatrix} 1^{\#} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1^{\#} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1^{\#} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1^{\#} & 1 \end{bmatrix}$$

Er zijn 4 onafhankelijke énen, aangegeven met #; alle énen zij te vangen door de eerste 3 kolommen en de laatste rij door te strepen.

HOOFDSTUK VI: MATROIDEN

Paragraaf 20: Inleiding

Opgave 1

Zij $(E,\mathcal{I})$ een matroïd. Laat $I,J \in \mathcal{I}$ met $|I| < |J|$.
Bewijs dat er een $K \subset J\backslash I$ bestaat z.d.d. $I \cup K \in \mathcal{I}$ en $|I \cup K| = |J|$.

Oplossing:

Beschouw allereerst een $J' \subseteq J$ met $|J'| = |I| + 1$. Volgens de uitbreidingseigenschap is er een $e \in J\backslash I$ zdd. $I \cup \{e\} \in \mathcal{I}$.
Herhaal dit met $I \cup \{e\}$ in plaats van I totdat zoveel elementen aan I zijn toegevoegd, zeg K zijn de toegevoegde elementen, dat $|I \cup K| = |J|$.

Opgave 2

Zij $(E,\mathcal{I})$ een matroïd.
Als I een onafhankelijke verzameling is en $I \cup \{e\}$ een afhankelijke verzameling is, dan bevat $I \cup \{e\}$ precies één kring. Bewijs deze bewering.

Oplossing:

Uit het bewijs van stelling 20.6 volgt dat een afhankelijke verzameling een kring bevat.

$$\text{Stel: } \left.\begin{array}{l} C_1 \subseteq I \cup \{e\} \text{ is kring} \\ C_2 \subseteq I \cup \{e\} \text{ is kring} \\ C_1 \neq C_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} e \in C_1 \cap C_2 \;\rightarrow\; \text{er is een kring} \\ C_3 \subseteq C_1 \cup C_2 - \{e\} \subseteq I \text{ : tegenspraak, want} \\ \text{onafhankelijke verz. bevatten geen kring.} \end{array}$$

Opgave 3

Zij M een matroïd. Toon het volgende aan:
M bevat geen kringen d.e.s.d. E is de enige basis van M.

Oplossing:

$\mathcal{C} = \emptyset \leftrightarrow$ iedere deelverz. van E is onafhankelijk $\leftrightarrow$ E is de enige maximale onafhankelijke verz. $\leftrightarrow \mathcal{B} = \{ E \}$.

Opgave 4

Zij $M = (E,\rho)$ een matroïd, en laat $A \subseteq B \subseteq E$.
Toon aan dat: $\rho(B) \leq \rho(A) + \rho(B\backslash A)$.

Oplossing:

Volgens de eigenschappen van de rangfunctie geldt:
$\rho(A) + \rho(B\backslash A) \geq \rho(A \cup B\backslash A) + \rho(A \cap B\backslash A) = \rho(B) + \rho(\emptyset) = \rho(B)$.

Opgave 5

Zij M een matroïd met duale matroïd M^*. Laten A_1 en A_2 disjuncte deelverzamelingen van E zijn zdd. A_1 onafhankelijk is in M en A_2 onafhankelijk in M^*. Toon aan dat er een basis B_1 van M en een basis B_1^* van M^* bestaat zdd. $A_1 \subseteq B_1$, $A_2 \subseteq B_1^*$ en $B_1 \cap B_1^* = \emptyset$.

Oplossing:

Volgens stelling 20.13(iii) bevat $E \backslash A_2$ een basis. Volgens opgave 1 is dan A_1 met elementen van $E \backslash A_2$ uit te breiden tot een basis B_1.
Neem nu $B_1^* = E \backslash B_1$, dan is (volgens stelling 20.10) B_1^* een basis van M^*.
Bovendien geldt: $A_2 \subseteq B_1^*$ en $B_1 \cap B_1^* = \emptyset$.

Opgave 6

Zij $M=(E,\mathcal{I})$ een matroïd. Laat I een niet-lege onafhankelijke verzameling zijn. Toon het volgende aan:

a. Er bestaat een cokring C_1^* z.d.d. $|C_1^* \cap I| = 1$.

b. Als $|I| < \rho(E)$, dan bestaat er een cokring C_2^* zdd. $|C_2^* \cap I| = 0$.

Oplossing:

a. Breid I uit tot een basis B, en laat $B^* = E \backslash B$.
B^* is een basis van M^*, dus $B^* \cup \{e\}$ bevat een kring C_1^* in M^* voor een $e \in I$, en deze kring bevat e: $|C_1^* \cap I| = |\{e\}| = 1$.

b. Neem weer B^* zoals in a. Als een $e \in B \backslash I$ aan B^* wordt toegevoegd ontstaat eveneens een kring, zeg C_2^*. Nu is echter $C_2^* \cap I = \emptyset$.

Opgave 7

Zij M een matroïd met duale matroïd M^*. Laat C^* een kring in M^* zijn.
Toon aan dat er voor iedere $e \in C^*$ een basis B van M is zdd. $B \subseteq (E \backslash C^*) \cup \{e\}$.

Oplossing:

Neem een kring C^* in M^* en laat $e \in C^*$. Omdat $C^* - \{e\}$ onafhankelijk is in M^*, is $C^* - \{e\}$ uit te breiden tot een basis in M^* (e behoort daar niet toe). Het complement is dan een basis voor M: $(E \backslash C^*) \cup \{e\}$ bevat een basis B van M, waar e toe behoort.

Opgave 8

Zij $M = (E,\mathcal{C})$ een matroïd. Toon aan:
$C \in \mathcal{C} \Leftrightarrow |C| \geq 1$, $|C \cap C^*| \neq 1$ voor alle $C^* \in \mathcal{C}^*$ en C is minimaal t.o.v. deze eigenschappen.

Oplossing:

$\Rightarrow$ Omdat de lege verz. niet tot $\mathcal{C}$ behoort geldt: $|C| \geq 1$.
Stel $C \cap C^* = \{e\}$. Laat $C' = C - \{e\}$ en $A = E \backslash C^*$. Volgens opgave 7 is er een basis B van M met $B \subseteq A \cup \{e\}$. Anderzijds is C' onafhankelijk, en dus volgens opgave 1 in $A \cup \{e\}$ tot een basis B' uit te breiden. Omdat $C' \cup \{e\}$ afhankelijk is, bevat B' het element e niet: $B' \cap C^* = \emptyset$, wat in tegenspraak is met stelling 20.13(iv). De minimaliteit volgt uit het feit dat iedere deelverz. van C onafhankelijk is en opgave 6a.

$\Leftarrow$ Veronderstel dat $|C \cap C^*| \neq 1$ voor alle $C^* \in \mathcal{C}^*$. Volgens opgave 6a is C een afhankelijke verzameling. C bevat dus een kring en volgens de minimaliteit ook niets meer: C is een kring.

Opgave 9

Zij $M = (E, \mathcal{C})$ een matroïd. Laat $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ en $x \in C_1 \cap C_2$.
Toon het volgende aan:
Voor iedere $y \in C_1 \backslash C_2$ is er een $C \in \mathcal{C}$ z.d.d. $y \in C \subseteq (C_1 \cup C_2) - \{x\}$.

Oplossing:

Veronderstel dat C_1, C_2, x, y zo zijn dat de bewering niet waar is, en laat $|C_1 \cup C_2|$ minimaal zijn onder alle tweetallen kringen waarvoor er een x en een y is zdd. de bewering niet waar is.
Omdat we weten dat $C_1 \cup C_2 - \{x\}$ een kring C_3 bevat, is dus $y \notin C_3$.
$C_3 \cap (C_2 \backslash C_1) \neq \emptyset$, want anders $C_3 \subseteq C_1$ en $C_3 \neq C_1$: tegenspraak met de eigenschap kring.
Laat $z \in C_3 \cap (C_2 \backslash C_1)$. $C_2 \cup C_3$ is een echte deelverz. van $C_1 \cup C_2$ ($y \notin C_2 \cup C_3$).
Bovendien geldt: $x \in C_2 \backslash C_3$. In verband met de minimaliteit van $|C_1 \cup C_2|$ is de bewering wel waar voor C_2 en C_3 met z in plaats van x en x in plaats van y : er is een C_4 zdd. $x \in C_4 \subseteq (C_2 \cup C_3) - \{z\}$.
Vervolgens krijgen we op analoge wijze:
$x \in C_1 \cap C_4$. $C_1 \cup C_4$ is een echte deelverz. van $C_1 \cup C_2$ ($z \notin C_1 \cup C_4$).
Omdat $y \in C_1 \backslash C_4$, kunnen we de bewering toepassen met C_1 en C_4:
er is een C_5 zdd. $y \in C_5 \subseteq (C_1 \cup C_4) - \{x\} \subseteq (C_1 \cup C_2) - \{x\}$: tegenspraak.

Opgave 10

Zij $M = (E, \mathcal{C})$ een matroïd. Verdeel de elementen van E in R, S, T met $|T| = 1$.
Dan is er òf een $C \in \mathcal{C}$ met $T \subseteq C$ en $C \cap S = \emptyset$ òf een $C^* \in \mathcal{C}^*$ met $T \subseteq C^*$ en $C^* \cap R = \emptyset$.
Toon deze bewering aan.

Oplossing:

Veronderstel eerst dat T in geen enkele kring van M zit. Dan geldt:
T zit in iedere basis (als $T \notin B$, dan bevat $B \cup T$ een kring waar T toe behoort), dus T in geen enkele basis van M^*: T afhankelijk in M^*, d.w.z. $T \subseteq \mathcal{C}^*$. Neem nu $C^* = T$, dan voldoet deze keuze.

Neem van nu af aan dat T in minstens één kring zit. Beschouw $A = R \cup T$.

a. Indien A geen kring bevat:

$A \subseteq B \in M$, d.w.z. $B^* = E \backslash B \in M^*$ en $B^* \subseteq S$. $B^* \cup T$ bevat een kring C^* in M^* met $T \subseteq C^*$ en $C^* \cap R = \varnothing$.

b. Indien A wel kringen bevat:

(i) Veronderstel dat er geen kring in A is die T bevat:

Stel $R' \subseteq R$ minimaal en zdd. $A' = A - R'$ geen kring bevat (dus $T \subseteq A'$). Breid A' uit tot een basis B in M (dat moet dan met elementen van S) en neem $B^* = E \backslash B$.

Beschouw $B^* \cup T$: $B^* \cup T$ bevat kring C^* in M^* en $T \in C^*$.

Veronderstel dat $C^* \cap R \neq \varnothing$, zeg $r \in C^* \cap R$: dan $r \in R'$.

$A' \cup r$ bevat kring C_r in M en T behoort niet tot C_r.

Nu geldt: $|C_r \cap C^*| = 1$: tegenspraak met opgave 8.

Dus was de veronderstelling dat $C^* \cap R \neq \varnothing$ onjuist:

$T \subseteq C^*$ en $C^* \cap R = \varnothing$.

(ii) Veronderstel dat er wel een kring C in A is die T bevat:

Stel er is ook een $C^* \in \mathcal{C}^*$ met $T \subseteq C^*$ en $C^* \cap R = \varnothing$.

Dan is $|C \cap C^*| = 1$, nl. T, wat weer in tegenspraak is met opgave 8.

Paragraaf 21: Voorbeelden van matroiden

Opgave 1

Bewijs dat de 2-uniforme matroïd met $E = \{1,2,3,4\}$ geen graaf-matroïd is.

Oplossing:

Stel wel, dan zijn $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$ en $\{3,4\}$ voortbrengende bomen van een graaf met 3 knooppunten (de nummers slaan op de nummers van de takken). Het is eenvoudig in te zien dat een dergelijke graaf niet bestaat.

Opgave 2

Toon aan dat iedere uniforme matroïd een transversaal matroïd is.

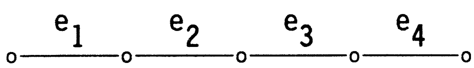
Oplossing:

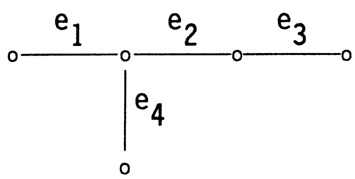
Beschouw de k-uniforme matroïd. Neem nu $S_i = E$ voor $1 \leq i \leq k$. Iedere deelverzameling van k elementen is een transversaal en er zijn geen andere.

Opgave 3

Construeer een voorbeeld dat aantoont dat twee niet-isomorfe grafen dezelfde graaf matroïd kunnen hebben (neem $E = \{e_1,e_2,e_3,e_4\}$).

Oplossing:

G_1: 

G_2: 

De grafen zijn niet isomorf, maar de graaf-matroïden wel, nl.

$\mathcal{B}_1 = \{(e_1, e_2, e_3, e_4)\}$ en ook $\mathcal{B}_2 = \{(e_1, e_2, e_3, e_4)\}$.

Opgave 4

a. Bewijs dat er precies 8 niet-isomorfe matroïden zijn op $E = \{1,2,3\}$.

b. Bewijs dat er hoogstens 2^{2^n} niet-isomorfe matroïden zijn op $E = \{1,2,\ldots,n\}$

c. Bewijs dat er hoogstens 2^{n^2} niet-isomorfe transversaal matroïden zijn op $E = \{1,2,\ldots,n\}$.

Oplossing:

a. 1. de triviale matroïd 5. neem $\mathscr{B}$ = { {1}, {2} }
   2. de 1-uniforme matroïd 6. neem $\mathscr{B}$ = { {1,2}, {1,3} }
   3. de 2-uniforme matroïd 7. neem $\mathscr{B}$ = { {1,2} }
   4. de discrete matroïd 8. neem $\mathscr{B}$ = { {1} }

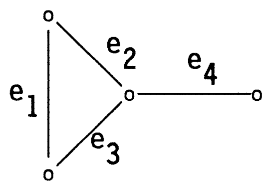
   Het is eenvoudig in te zien dat ze voldoen aan de definitie van matroïd en dat ze niet isomorf zijn.

b. Er zijn 2^n deelverz. van E en elke deelverz. kan wel of niet in een basis zitten.

c. Iedere partiële transversaal correspondeert met een deelverz. van de n^2 takken van de volledige bipartiete graaf $K_{n,n}$. Iedere basis correspondeert met een deelverz. van deze takken en er zijn 2^{n^2} deelverz.

Opgave 5

Beschouw de hiernaast getekende graaf G.
Zijn M(G) en $M^*(G)$ transversaal matroïden ?



Oplossing:

a. M(G): Dit is een transversaal matroïd, nl.
Neem S_1 = {1,3}, S_2 = {1,2} en S_3 = {4}. Deze voldoet, want alle alle deelverz. zijn partiële transversalen, behalve {1,2,3} en {1,2,3,4}.

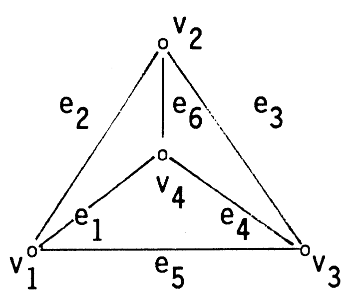
b. $M^*(G)$:Dit is eveneens een partiële transversaal.
De kringen van $M^*(G)$ zijn de minimale sneden van de graaf G: $\{e_1,e_2\}$, $\{e_1,e_3\}$, $\{e_2,e_3\}$ en $\{e_4\}$. Deze mogen dus geen partiële transversaal zijn. S_1 = {1,2,3} voldoet hier precies aan.

Opgave 6

a. Bepaal de cograaf matroïd $M^*(K_4)$ van de volledige 4-graaf.
b. Toon aan dat $M(K_4)$ en $M^*(K_4)$ isomorf zijn.

Oplossing:

a.Beschouw de K_4, zoals hiernaast getekend. De kringen van $M^*(K_4)$ zijn de minimale sneden van K_4. Deze zijn door volledige enumeratie te bepalen: $\{e_1, e_2, e_5\}$, $\{e_2,e_3,e_6\}$, $\{e_3,e_4,e_5\}$, $\{e_1,e_4,e_6\}$, $\{e_1,e_3,e_5,e_6\}$, $\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$, $\{e_2,e_4,e_5,e_6\}$.



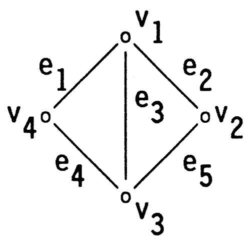
b. De kringen van $M(K_4)$ zijn de enkelvoudige kringen van de K_4. Ook deze kunnen we opschrijven: $\{e_1,e_2,e_6\}$, $\{e_3,e_4,e_6\}$, $\{e_1,e_4,e_5\}$, $\{e_2,e_3,e_5\}$, $\{e_2,e_3,e_4,e_1\}$, $\{e_2,e_6,e_4,e_5\}$, $\{e_5,e_3,e_6,e_1\}$.
De isomorfie is in te zien via het volgende verband:

$$
\begin{aligned}
e_1 &\longleftrightarrow e_3^* \\
e_2 &\longleftrightarrow e_4^* \\
e_3 &\longleftrightarrow e_1^* \\
e_4 &\longleftrightarrow e_2^* \\
e_5 &\longleftrightarrow e_6^* \\
e_6 &\longleftrightarrow e_5^*
\end{aligned}
$$

Paragraaf 22: Grafen en matroiden

Opgave 1

a. Schrijf de bases en de kringen op van de graafmatroïd van de hieronder getekende graaf G



b. Is deze matroïd een binaire matroïd? Verklaar uw antwoord.

c. Is deze matroïd een transversaal matroïd? Verklaar uw antwoord.

Oplossing:

a. $\mathscr{B} = \{ \{e_1,e_2,e_3\}, \{e_1,e_2,e_4\}, \{e_1,e_2,e_5\}, \{e_1,e_3,e_5\}, \{e_1,e_4,e_5\}, \{e_2,e_3,e_4\}, \{e_2,e_4,e_5\}, \{e_3,e_4,e_5\} \}.$

$\mathscr{C} = \{ \{e_1,e_3,e_4\}, \{e_2,e_3,e_5\}, \{e_1,e_2,e_4,e_5\} \}.$

b. $e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}.$

De minimale afhankelijke verzamelingen zijn inderdaad de kringen:

Stel $\lambda_1e_1 + \lambda_2e_2 + \lambda_3e_3 + \lambda_4e_4 + \lambda_5e_5 = 0$. Dit is equivalent met:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_5 = 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_4 = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_4 \\ \lambda_2 = \lambda_5 \\ \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 0 \end{cases}$$

(i) $\lambda_1 = 0$ en $\lambda_2 = 0 \to \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0 \to$ triviale oplossing

(ii) $\lambda_1 = 0$ en $\lambda_2 = 1 \to \lambda_4 = 0, \lambda_5 = \lambda_3 = 1 \to$ kring $\{e_2,e_3,e_5\}$

(iii) $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 0 \to \lambda_5 = 0, \lambda_4 = \lambda_3 = 1 \to$ kring $\{e_1,e_3,e_4\}$

(iv) $\lambda_1 = 1$ en $\lambda_2 = 1 \to \lambda_3 = 0, \lambda_4 = \lambda_5 = 1 \to$ kring $\{e_1,e_2,e_4,e_5\}$

c. $\mathscr{S} = (S_1,S_2,S_3)$ met $S_1 = \{1,4\}$, $S_2 = \{2,5\}$, $S_3 = \{1,2,3,4,5\}$ voldoet,nl. de minimale niet representeerbare deelverz. van E zijn precies de elementen van $\mathscr{C}$ (eenvoudige controle).

Opgave 2

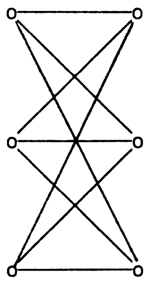
Toon met behulp van stelling 22.6 aan dat de volledige bipartiete graaf $K_{3,3}$ niet vlak is.

Oplossing:

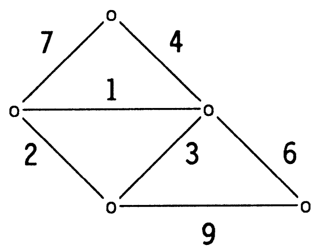
We moeten bewijzen dat er geen graaf G is met $M(K_{3,3}) \cong M^*(G)$. Door over te gaan op de duale is dit equivalent met te bewijzen dat er geen graaf G is met $M^*(K_{3,3}) \cong M(G)$.

Veronderstel dat G wel voldoet, d.w.z. de enkelvoudige kringen van G corresponderen met de minimale sneden van $K_{3,3}$.

Beschouw de $K_{3,3}$ zoals hieronder getekend en neem de voortbrengende boom corresponderend met de takken $\{1,4,5,8,9\}$.



De bij deze voortbrengende boom behorende sneden zijn: $\{1,2,3\}$, $\{2,3,4,7\}$, $\{2,3,5,6,7\}$, $\{3,6,7,8\}$ en $\{3,6,9\}$.
Dit moeten dus enkelvoudige kringen worden in G.
Begin met de kring $\{1,2,3\}$ en voeg toe de kring $\{3,6,9\}$ (dit kan op twee manieren, maar beschouw de hieronder getekende; het andere geval gaat analoog).
Omdat $\{2,3,4,7\}$ ook een kring moet zijn, wordt de graaf uitgebreid zoals getekend (de takken 4 en 7 kunnen niet worden omgekeerd, want 3,6 en 7 moeten in één kring komen, tezamen met 2 en 5).



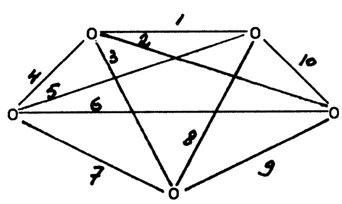
We zien nu echter dat de takken 3,6,7 en 8 niet meer in één kring kunnen, wat wel zou moeten: zo'n graaf G bestaat inderdaad niet.

Opgave 3

Toon aan dat de bij de volledige graaf K_5 behorende matroïd $M(K_5)$ geen vlakke matroïd is.

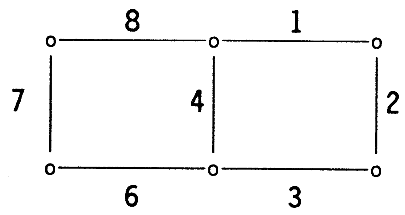
Oplossing:

Analoog aan opgave 2 moeten we bewijzen dat er geen graaf G bestaat zdd. $M^*(K_5) \cong M(G)$. Veronderstel weer dat zo'n G wel bestaat. Laat de takken van de K_5 genummerd zijn zoals hieronder aan gegeven en neem $\{1,10,9,7\}$ als voortbrengende boom. De daarbij behorende minimale sneden zijn dan:



$\{1,2,3,4\}$, $\{10,2,3,4,5,8\}$, $\{9,3,4,5,6,8\}$, $\{4,5,6,7\}$, maar ook $\{1,5,8,10\}$, $\{10,2,6,9\}$ en $\{3,7,8,9\}$ zijn minimale sneden.
Dit moeten in G enkelvoudige kringen worden.

Start met {1,2,3,4} en voeg toe {4,6,7,8}. Hieronder is een manier van deze twee kringen getekend (de andere mogelijkheden gaan analoog).



{3,7,8,9} moeten ook een kring vormen, wat echter niet mogelijk is: G bestaat dus niet.

Paragraaf 23: Het gretige algorithme

Opgave 1

Beschouw de vectoren

$$x^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad x^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad x^3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix} \quad x^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad x^5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

met de gewichten $w(x^1) = 10$, $w(x^2) = 8$, $w(x^3) = 8$, $w(x^4) = 4$, $w(x^5) = 1$.
Bepaal een onafhankelijk stel vectoren met maximaal gewicht.

Oplossing:

<u>iteratie 1:</u> $B = \emptyset$; $i = 1$; $w = 0$; $B := \{x^1\}$ en $w := 10$; $i := 2$.

<u>iteratie 2:</u> $B := \{x^1, x^2\}$ en $w := 18$; $i := 3$.

<u>iteratie 3:</u> x^3 is afhankelijk van x^1 en x^2 , nl. $x^3 = 2x^1 + x^2$; $i := 4$.

<u>iteratie 4:</u> $B := \{x^1, x^2, x^4\}$ en $w := 22$; $i := 5$.

<u>iteratie 5:</u> x^5 is afhankelijk van x^1 en x^4 , nl. $x^5 = x^1 + x^4$.

Opgave 2

Beschouw 6 jobs die moeten worden uitgevoerd op één machine. Alle jobs vragen één uur tijd. De machine start om 8.00 uur. Hieronder staan de deadlines en de boeten bij overschrijding van de deadline.

job	1	2	3	4	5	6
deadline	12.00	9.00	10.00	11.00	13.00	10.00
boete	*f* 3,-	*f* 6,-	*f* 9,-	*f* 8,-	*f* 7,-	*f* 5,-

Gevraagd: volgorde van de jobs zodat de boetekosten minimaal zijn.

Oplossing:

Schrijf de jobs eerst in volgorde van afnemende boetes:

job	3	4	5	2	6	1
deadline	10.00	11.00	13.00	9.00	10.00	12.00
boete	*f* 9,-	*f* 8,-	*f* 7,-	*f* 6,-	*f* 5,-	*f* 3,-

Voor de bij dit probleem behorende deelverz. $S_i \subseteq \{1,2,3,4,5,6\}$ geldt:
$S_1 = \{3,4,5,2,6,1\}$, $S_2 = \{3,4,5,6,1\}$, $S_3 = \{4,5,1\}$, $S_4 = \{5,1\}$, $S_5 = \{5\}$ en $S_6 = \emptyset$.

iteratie 1: $B = \emptyset$; $i = 1$; $w = 0$; $B := \{3\}$, nl. kies 3 uit S_1;
$w := 9$; $i := 2$.

iteratie 2: $B := \{3,4\}$, nl. kies 3 uit S_1 en 4 uit S_2; $w := 17$; $i := 3$.

iteratie 3: $B := \{3,4,5\}$, nl. kies 3 uit S_1, 4 uit S_2 en 5 uit S_3;
$w := 24$; $i := 4$.

iteratie 4: $B := \{3,4,5,2\}$, nl. kies 3 uit S_2, 4 uit S_3, 5 uit S_4 en 2 uit S_1;
$w := 30$; $i := 5$.

iteratie 5: $\{3,4,5,2,6\}$ is geen partiële transversaal, nl. 3,2 en 6 komen alleen voor in S_1 en S_2; $i := 6$.

iteratie 6: $B := \{3,4,5,2,1\}$, nl. kies 3 uit S_2, 4 uit S_3, 5 uit S_5, 2 uit S_1 en 1 uit S_4; $w := 33$;

De volgorde waarin de jobs worden uitgevoerd is dus: 2,3,4,1,5. Alleen job 6 kan niet op tijd worden uitgevoerd, wat een boete van *ƒ* 5,- oplevert.

Opgave 3

Beschouw de volledige graaf K_6 met knooppuntenverzameling $\{v_1,v_2,\ldots,v_6\}$ en takkenverzameling E. Aan de takken $(v_i \in v_j)$ worden gewichten w_{ij} toegekent, en wel als volgt:

$w_{12} = 3$; $w_{13} = 4$; $w_{14} = 3$; $w_{15} = 4$; $w_{16} = 3$; $w_{23} = 2$; $w_{24} = 6$; $w_{25} = 3$;
$w_{26} = 1$; $w_{34} = 0$; $w_{35} = 4$; $w_{36} = 1$; $w_{45} = 3$; $w_{46} = 2$; $w_{56} = 0$.

Construeer met het gretige algorithme een voortbrengende boom met maximaal gewicht.

Oplossing:

We doorlopende takken beginnend met de tak met het grootste gewicht, waarbij het volgende gebeurt:
tak $(v_2 \& v_4)$ wel gekozen; tak $(v_1 \& v_3)$ wel gekozen; tak $(v_1 \& v_5)$ wel gekozen; tak $(v_3 \& v_5)$ niet gekozen (anders v_1,v_3,v_5,v_1 kring); tak $(v_1 \& v_2)$ wel gekozen; tak $(v_1 \& v_4)$ niet gekozen (anders v_1,v_4,v_2,v_1 kring); tak $(v_1 \& v_6)$ wel gekozen.
We kunnen nu stoppen, want we hebben 5 takken gekozen en we weten dat een voortbrengende boom 5 takken bevat.

Opgave 4

Bewijs dat een voortbrengende boom met maximale lengte ook als volgt kan worden geconstrueerd: "verwijder steeds de kortste tak maar zorg ervoor dat de graaf samenhangend blijft".

Oplossing:

De duale matroïd $M^*(G)$ heeft als onafhankelijke verzamelingen die takkenverz. die geen sneden bevatten, d.w.z. $I \subseteq \mathcal{I}^*$ d.e.s.d. als $E \backslash I$ samenhangend is. Een basis van $M^*(G)$ is dus een B zdd. $E \backslash B$ minimaal samenhangend is, d.w.z. $E \backslash B$ is een voortbrengende boom.
Pas nu het gretige algorithme toe op $M^*(G)$ met als gewichten $w^*(e)$, waarbij $w^*(e) = \max_e w(e) - w(e)$: dan wordt dus steeds de kortste tak verwijderd, terwijl de graaf samenhangend blijft. Aldus ontstaat een voortbrengende boom zdd. de verwijderde takken de kleinste totale lengte hebben, d.w.z. de boom zelf heeft de grootste totale lengte.